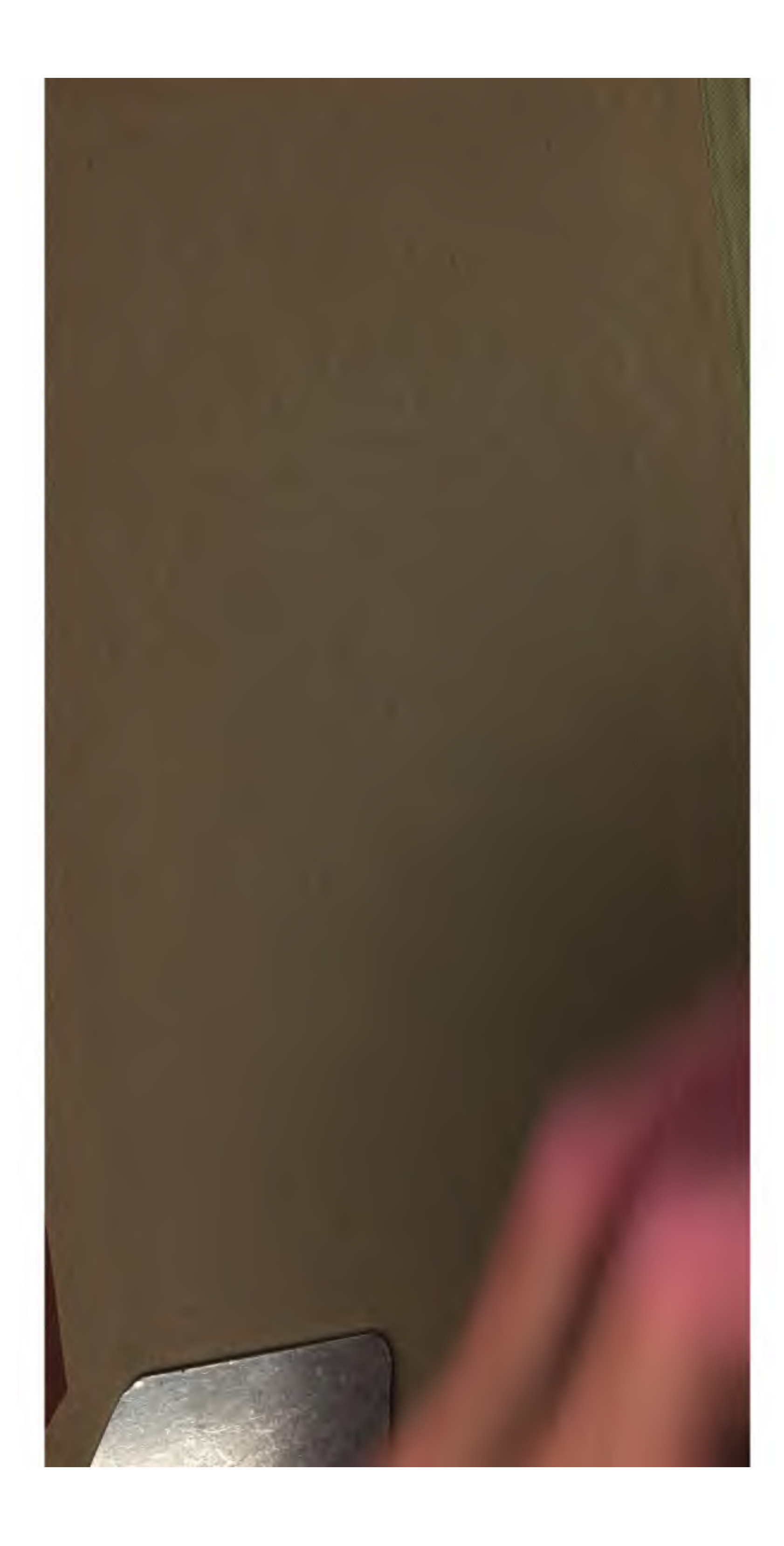


NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIEME SÉRIE.

1870.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

J. BOURGET,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME NEUVIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM;
CONTINUÉE, A PARTIR DE 1863, PAR MM. GERONO ET PROUHET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1870.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. LAGUERRE.

1. J'ai énoncé, comme exercice, dans les *Nouvelles Annales*, la proposition suivante : *Étant donnés deux points quelconques* A *et* B *d'une surface du second ordre, si en ces points on mène les normales à la surface, et si l'on désigne par* a *et* b *les points où ces normales coupent un plan de symétrie quelconque de la surface, le plan mené par le milieu de la corde* AB *et perpendiculairement à cette corde passe par le milieu du segment* ab.

La même propriété peut s'énoncer ainsi : *Les projections des normales* Aa *et* Bb *sur la corde* AB *sont égales et de signes contraires.*

D'où la proposition suivante :

Soient deux points A *et* A′ *situés sur une surface du second ordre; désignons par* N *et* N′ *les longueurs des normales en ces deux points, c'est-à-dire les longueurs des segments compris sur chaque normale entre la sur-*

face et un de ses plans de symétrie, par V *et* V′ *les angles que font respectivement les directions de ces normales avec la direction de la corde* AA′; *on a, quelle que soit la position de ces deux points sur la surface, la relation*

$$(1) \qquad \frac{N'}{N} = -\frac{\cos V}{\cos V'}.$$

2. Imaginons maintenant une courbe quelconque C tracée sur une surface du second ordre, et soient M et M′ deux points infiniment voisins de cette courbe; la relation précédente aura lieu pour ces deux points. N désignant la normale au point M, $N + dN$ sera la normale au point M′. Il s'agit maintenant d'évaluer le rapport des deux cosinus $\cos V$ et $\cos V'$.

A cet effet, je me servirai des désignations et des formules employées par M. Serret dans sa Note *sur les lignes de courbure des surfaces* insérée dans le *Traité de calcul différentiel* de Lacroix (p. 298).

Désignons par α, β, γ les angles que forme, avec trois axes rectangulaires, la tangente à la courbe au point M, dont les coordonnées sont x, y, z; par ξ, υ, ζ et λ, μ, ν les angles formés avec les mêmes axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur. Soient aussi $d\varepsilon$ et $d\eta$ les angles de contingence et de torsion.

Désignons par α', β', γ' les angles formés avec les axes par la normale à la surface du second ordre au point (x, y, z). On peut toujours assigner une ligne à double courbure C′ qui corresponde point par point à la courbe C, de telle sorte que la tangente en un point de cette courbe soit parallèle à la normale menée à la surface du second ordre par le point correspondant de la courbe C. Soient ξ', υ', ζ' et λ', μ', ν' les angles que font avec les axes la normale principale et l'axe du plan osculateur de cette

courbe; soient, de plus, $d\varepsilon'$ et $d\eta'$ les angles de contingence et de torsion.

Cela posé, on peut écrire les trois groupes suivants de formules, par lesquelles les angles ω et ϖ se trouvent complétement définis :

$$(A)\left\{\begin{aligned}
&\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,\\
&\cos\alpha\cos\xi' + \cos\beta\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta' = \sin\omega,\\
&\cos\alpha\cos\lambda' + \cos\beta\cos\mu' + \cos\gamma\cos\nu' = \cos\omega,\\
&\cos\xi\cos\alpha' + \cos\upsilon\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = -\sin\varpi,\\
&\cos\xi\cos\xi' + \cos\upsilon\cos\upsilon' + \cos\zeta\cos\zeta' = -\cos\varpi\cos\omega,\\
&\cos\xi\cos\lambda' + \cos\upsilon\cos\mu' + \cos\zeta\cos\nu' = \cos\varpi\sin\omega,\\
&\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \cos\varpi,\\
&\cos\lambda\cos\xi' + \cos\mu\cos\upsilon' + \cos\nu\cos\zeta' = -\sin\varpi\cos\omega,\\
&\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = \sin\varpi\sin\omega.
\end{aligned}\right.$$

La différentiation de ces équations conduit aux trois suivantes :

$$(2)\qquad \sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon,$$

$$(3)\qquad d\eta' + d\omega = -\cos\varpi\, d\varepsilon,$$

$$(4)\qquad d\varpi = d\eta + \cos\omega\, d\varepsilon'.$$

3. Pour évaluer $\cos V$ et $\cos V'$, je remarque que, les cosinus des angles que fait la normale au point M avec les axes étant respectivement $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, le cosinus de l'angle que fait la normale au point M' avec l'axe des x est

$$\cos\alpha' + d\cos\alpha' + \tfrac{1}{2}\, d^2\cos\alpha',$$

expression qui, en prenant l'arc de la courbe pour variable indépendante et en employant les formules données par M. Serret (LACROIX, p. 284 et suivantes), devient

$$\cos\alpha' + \cos\xi' d\varepsilon' + \tfrac{1}{2}(\cos\xi' d^2\varepsilon' - \cos\alpha' d\varepsilon'^2 - \cos\lambda' d\varepsilon' d\eta').$$

Les cosinus des angles que fait cette normale avec les deux autres axes auraient une forme semblable; il est inutile de les écrire.

Cherchons maintenant les cosinus des angles que fait avec les axes la corde MM′; il suffit évidemment de trouver des quantités proportionnelles à ces cosinus. On pourra donc, au lieu de ces cosinus, employer les projections de la corde MM′ sur les trois axes, ou bien δx, δy et δz : $x+\delta x, y+\delta y$ et $z+\delta z$ désignant les coordonnées du point M′.

La formule de Taylor donne, en se bornant aux premiers termes,

$$\delta x = \left(\frac{dx}{ds}\right) ds + \tfrac{1}{2} d\left(\frac{dx}{ds}\right) ds + \tfrac{1}{6} d^2\left(\frac{dx}{ds}\right) ds;$$

or $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$; on pourra donc prendre, pour le cosinus de l'angle que fait avec l'axe des x la corde MM′, l'expression

$$\cos\alpha + \tfrac{1}{2} d\cos\alpha + \tfrac{1}{6} d^2(\cos\alpha),$$

expression qui, au moyen des formules de M. Serret, devient

$$\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\xi\, d\varepsilon + \tfrac{1}{6}(\cos\xi\, d^2\varepsilon - \cos\alpha\, d\varepsilon^2 - \cos\lambda\, d\varepsilon\, d\eta).$$

Les deux autres cosinus auraient une forme semblable; il est inutile d'en donner la valeur.

Ceci posé, la formule connue qui donne le cosinus de l'angle de deux droites fournit immédiatement, en employant les relations (A), les deux expressions suivantes :

$$(5)\qquad \cos V = -\tfrac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \tfrac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \tfrac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos V' = &-\tfrac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \tfrac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \tfrac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \sin\omega\, d\varepsilon' \\ &-\tfrac{1}{2}\cos\varpi\cos\omega\, d\varepsilon\, d\varepsilon' + \tfrac{1}{2}\sin\omega\, d^2\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\cos\omega\, d\varepsilon'\, d\eta'.\end{aligned}\right.$$

Cette dernière expression peut se simplifier; on a, en effet, d'après l'équation (2),

$$\sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon;$$

en outre, en différentiant cette dernière relation, on obtient

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d\,(\sin\varpi\, d\varepsilon) - \cos\omega\, d\varepsilon' d\omega,$$

ou bien, comme d'après l'équation (3)

$$d\omega = - d\eta' - \cos\varpi\, d\varepsilon,$$

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d(\sin\varpi\, d\varepsilon) + \cos\omega\, d\varepsilon' d\eta' + \cos\omega \cos\varpi\, d\varepsilon\, d\varepsilon';$$

en portant ces valeurs de $\sin\omega\, d\varepsilon'$ et de $\sin\omega\, d^2\varepsilon'$ dans l'équation (6), il viendra, toutes réductions faites,

$$(7)\quad \cos V' = \tfrac{1}{2} \sin\varpi\, d\varepsilon - \tfrac{1}{6} \sin\varpi\, d^2\varepsilon - \tfrac{1}{6} \cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \tfrac{1}{2}\, d(\sin\varpi\, d\varepsilon).$$

L'équation (1) devient donc, en multipliant les deux termes du second membre par 2,

$$1 + \frac{dN}{N} = - \frac{- \sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3} \sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3} \cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta}{\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3} \sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3} \cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + d(\sin\varpi\, d\varepsilon)};$$

d'où, en réduisant,

$$\frac{dN}{N} = \frac{\frac{2}{3} \sin\varpi\, d^2\varepsilon + \frac{2}{3} \cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta - d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon};$$

ou bien encore

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3} \frac{d^2\varepsilon}{d\varepsilon} - \frac{d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon} + \frac{2}{3} \frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi}.$$

Remarquons maintenant que $d\varepsilon = \dfrac{ds}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la courbe C, et que l'arc est la variable indépendante; par conséquent, on a $d^2\varepsilon = ds\, d\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$.

La relation précédente devient donc

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)} - \frac{d\left(\frac{\sin\varpi}{\rho}\right)}{\frac{\sin\varpi}{\rho}} + \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi};$$

d'où, en intégrant,

$$\log N = \tfrac{2}{3}\log\frac{1}{\rho} - \log\frac{\sin\varpi}{\rho} + \tfrac{2}{3}\int\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi};$$

et, en passant des logarithmes aux nombres, après avoir chassé le dénominateur 3,

$$\frac{N^3}{\rho}\sin\varpi^3 = e^{2\int\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi}} \times \text{const.}$$

D'où l'on déduit la proposition suivante, en remarquant que ϖ désigne le complément de l'angle que fait avec la normale à la surface la normale principale de la courbe C :

Théorème. — *Étant donnée une courbe quelconque tracée sur une surface du second ordre, désignons, en un point quelconque de cette courbe, l'angle de torsion par* $d\eta$ *et par* ϖ *le complément de l'angle que fait en ce point, avec la normale à la surface, la normale principale; cela posé, si l'on considère un arc de la courbe compris entre les points* A_0 *et* A_1, *et si l'on désigne respectivement par* N_0 *et* N_1, ρ_0 *et* ρ_1, ϖ_0 *et* ϖ_1 *les valeurs de la normale, du rayon de courbure de la courbe et de l'angle* ϖ *aux points extrêmes de l'arc, on a la relation suivante :*

$$(8)\qquad \frac{N_1^3}{\rho_1^3}\sin\varpi_1^3 : \frac{N_0^3\sin\varpi_0^3}{\rho_0} = e^{2\int\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi}},$$

l'intégrale contenue dans le second membre s'étendant le long de la courbe du point A_0 *au point* A_1.

4. La formule précédente fournit aisément les relations connues pour les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

Considérons d'abord une ligne géodésique; d'après la définition de cette ligne, on a pour tous ses points $\sin\varpi = 1$ et $\tang\varpi = \infty$; l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) est donc nulle, et il vient simplement

$$\frac{N_1^3}{\rho_1} : \frac{N_0^3}{\rho_0} = 1;$$

d'où cette proposition :

Le long d'une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, le rayon de courbure de la courbe est proportionnel au cube de la normale.

C'est le théorème de Joachimsthal.

5. Supposons maintenant que C soit une des lignes de courbure de la surface; alors, d'après le théorème de Lancret, on a

$$d\eta = d\varpi;$$

l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) devient alors

$$\int \frac{d\varpi}{\tang\varpi} = \log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0,$$

le second membre de cette équation devient

$$e^{2(\log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0)} = \frac{\sin\varpi_1^2}{\sin\varpi_0^2},$$

et la formule (8) donne alors

$$\frac{N_1^3 \sin\varpi_1}{\rho_1} : \frac{N_0^3 \sin\varpi_3}{\rho_0} = 1;$$

d'où l'on conclut que le long de la courbe $\frac{N^3 \sin \varpi}{\rho}$ conserve une valeur constante. Remarquons maintenant que, d'après le théorème de Meusnier, $\frac{\sin \varpi}{\rho}$ est égal à $\frac{1}{r}$, r désignant le rayon de courbure de la section normale tangente à C; le long d'une même ligne de courbure $\frac{N^3}{r}$ conserve donc la même valeur.

D'où cette proposition, due à M. Dupin :

Le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe varie proportionnellement au cube de la normale.

6. Si j'avais voulu me restreindre au cas des lignes géodésiques et des lignes de courbure, il eût été très-facile de remplacer les considérations analytiques qui précèdent par des considérations géométriques très-simples et très-élémentaires qui eussent conduit immédiatement aux théorèmes de Joachimsthal et de M. Dupin. Je laisse ce soin au lecteur; mon seul but, dans cette Note, était d'établir la formule générale (8), sur laquelle j'aurai plus tard l'occasion de revenir, tant pour en montrer l'application à la géométrie des surfaces du second ordre que pour montrer comment elle s'étend aux surfaces de degré supérieur.

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE TRIGONOMÉTRIE;

PAR M. S. RÉALIS.

---

1. C'est Euler qui a reconnu le premier, dans un Mémoire inséré dans les *Novi Commentarii Academiæ*

Petropolitanæ, t. VIII, p. 157, que la limite vers laquelle tend le produit

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n},$$

lorsque le nombre n des facteurs augmente indéfiniment, est égale à $\frac{\sin x}{x}$, en sorte qu'on a, pour un nombre illimité de facteurs,

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^4}\cdots = \frac{\sin x}{x}.$$

Ainsi que le remarque M. Frenet dans son *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal* (2e édition, p. 56), la considération de cette limite s'était présentée à Viète à propos de la surface du cercle. Ce géomètre a été conduit, en effet, à une relation qui revient à la formule

$$\frac{S_{2^n k}}{S_k} = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}},$$

où S_k désigne la surface du polygone régulier inscrit de k côtés, et x l'angle au centre de ce polygone.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1re série, t. VIII, p. 459, et t. XVII, p. 283), on trouve une démonstration élémentaire de la formule d'Euler, démonstration adoptée maintenant dans l'enseignement classique, et consignée dans plusieurs ouvrages didactiques, entre autres dans le *Recueil* mentionné.

La démonstration que je présente ici est un peu moins simple que celle qu'on vient de citer, mais elle est tout aussi élémentaire, et conduit incidemment à plusieurs résultats intéressants.

2. Dans cette démonstration, on s'appuie d'abord sur

la relation

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)],$$

par laquelle on exprime un produit de deux cosinus au moyen d'une somme de deux cosinus.

Faisons, dans cette formule,

$$a=\frac{x}{2},\quad b=\frac{x}{2^2},$$

x désignant un arc quelconque, et multiplions chaque nombre par $\cos\frac{x}{2^3}$; il nous viendra

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}+\cos\frac{3x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\right).$$

Mais, en vertu de la relation rappelée,

$$\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2^3}+\cos\frac{3x}{2^3}\right),$$

$$\cos\frac{3x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5x}{2^3}+\cos\frac{7x}{2^3}\right);$$

donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}=\frac{1}{2^2}\left(\cos\frac{x}{2^3}+\cos\frac{3x}{2^3}+\cos\frac{5x}{2^3}+\cos\frac{7x}{2^3}\right).$$

On trouve ainsi, en général, pour toute valeur entière et positive de n,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n}+\cos\frac{3x}{2^n}+\cos\frac{5x}{2^n}+\ldots\right.\\&\qquad\left.+\cos\frac{(2^n-3)x}{2^n}+\cos\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right],\end{aligned}\right.$$

ce qui se prouve directement en vérifiant que, si la for-

mule (1) subsiste pour une valeur donnée de n, elle subsistera encore pour la valeur $n+1$.

3. *Remarques*. — 1° D'après la manière dont on passe de la formule (1) où l'on fait $n=2$, à la même formule où l'on fait $n=3$, puis de proche en proche aux cas de $n=4, 5, 6, \ldots$, on est conduit à remarquer, en passant, que les 2^{n-1} premiers nombres impairs, depuis 1 jusqu'à 2^n-1 inclusivement, sont donnés par les 2^{n-1} valeurs que prend l'expression

$$2^{n-1} \pm 2^{n-2} \pm 2^{n-3} \pm \ldots \pm 2^2 \pm 2 \pm 1,$$

lorsqu'on y combine de toutes les manières possibles les signes des termes $2^{n-2}, 2^{n-3}, \ldots, 2^2, 2, 1$.

On a, par exemple, pour $n=3$,

$$2^3-1=7, \quad 2^2=4,$$

et

$$2^2-2-1=1,$$
$$2^2-2+1=3,$$
$$2^2+2-1=5,$$
$$2^2+2+1=7.$$

Il suit de là, entre autres conséquences intéressantes pour l'analyse numérique, que tout nombre impair peut être représenté d'une infinité de manières au moyen de l'expression ci-dessus, où l'on donne successivement à n toutes les valeurs entières, à partir de la plus petite valeur qui convient au nombre considéré.

Par exemple,

$$5=2^2+2-1,$$
$$5=2^3-2^2+2-1,$$
$$5=2^4-2^3-2^2+2-1,$$
$$5=2^5-2^4-2^3-2^2+2-1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut aussi reconnaître immédiatement que la somme des 2^{n-1} premiers nombres impairs est $2^{2(n-1)}$, ainsi qu'on le sait d'ailleurs par les éléments d'arithmétique.

2° Peut-être est-il bon d'observer que la formule (1) est un cas particulier, très-remarquable, à la vérité, d'une autre formule par laquelle on exprime en général un produit d'un nombre quelconque de cosinus au moyen d'une somme de cosinus.

Soient, en effet, n arcs quelconques, x_1, x_2, x_3, $x_4, \ldots, x_n$. On trouve, par la même voie qui nous a conduit à la formule (1),

$$\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cos x_4 \ldots \cos x_n$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum \cos(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm \ldots \pm x_n),$$

où la caractéristique sommatoire indique qu'il faut ajouter ensemble les cosinus de tous les arcs (au nombre de 2^{n-1}) qui sont donnés par l'expression

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm \ldots \pm x_n,$$

dans laquelle on combine de toutes les manières possibles les signes des $n - 1$ quantités x_2, x_3, $x_4, \ldots, x_n$.

Cette formule, du reste, ne doit être regardée que comme une transformée de celle relative au cas particulier de $n = 2$, dont elle est engendrée.

4. Rappelons maintenant la formule

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots + \cos[a+(k-1)b]$$
$$= \frac{\sin \frac{kb}{2} \cos\left(a + \frac{k-1}{2} b\right)}{\sin \frac{b}{2}};$$

qui sert à calculer la somme des cosinus d'une suite de k arcs en progression par différence.

Soit fait, dans cette formule,

$$a = \frac{x}{2^n}, \quad b = \frac{x}{2^{n-1}}, \quad k = 2^{n-1},$$

il en résultera

$$\cos\frac{x}{2^n} + \cos\frac{3x}{2^n} + \cos\frac{5x}{2^n} + \ldots + \cos\frac{(2^n - 1)x}{2^n}$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2^n}}.$$

La formule (1) devient donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}},$$

et, en mettant le second membre sous la forme

$$\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\frac{x}{2^n}}\,\frac{\sin x}{x},$$

on voit tout de suite qu'on aura, à la limite,

$$(2) \quad \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{pour} \quad n = \infty,$$

quelle que soit la valeur de l'arc x.

C'est la relation d'Euler, qu'il s'agissait de démontrer. On voit, par ce qui précède, qu'elle est équivalente à la relation

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n} + \cos\frac{3x}{2^n} + \cos\frac{5x}{2^n} + \ldots + \cos\frac{(2^n - 1)x}{2^n}\right] \\ &= \frac{\sin x}{x}, \quad \text{pour} \quad n = \infty. \end{aligned} \right.$$

5. *Remarques.* — 1° Mettant la formule (2) sous la forme

$$\text{séc}\frac{x}{2}\,\text{séc}\frac{x}{2^2}\,\text{séc}\frac{x}{2^3}\,\text{séc}\frac{x}{2^4}\cdots = \frac{x}{\sin x},$$

ainsi que le fait Euler, et supposant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\text{séc}\frac{\pi}{2^2}\,\text{séc}\frac{\pi}{2^3}\,\text{séc}\frac{\pi}{2^4}\,\text{séc}\frac{\pi}{2^5}\cdots = \frac{\pi}{2},$$

résultat auquel M. Catalan est parvenu par une voie différente dans une Note qu'on lit dans les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 190.

2° Prenant la dérivée des deux membres de l'équation

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}},$$

on parvient à la relation

$$\frac{1}{2}\,\text{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\,\text{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\,\text{tang}\frac{x}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\,\text{tang}\frac{x}{2^n}$$
$$= \frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\text{tang}\frac{x}{2^n}}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{tang}\,x}.$$

Si n grandit indéfiniment, le nombre des termes du premier membre de cette formule devient illimité, et le second membre, qui exprime la somme de ces termes, tend indéfiniment vers la limite $\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{tang}\,x}$. On a donc

$$\frac{1}{2}\,\text{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\,\text{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\,\text{tang}\frac{x}{2^3} + \cdots = \frac{1}{x} - \frac{1}{\text{tang}\,x}.$$

Ce résultat renferme la solution de la question 951 (Laisant), proposée dans les *Nouvelles Annales* (juillet

1869). Il avait été obtenu d'une manière directe par Euler, qui, par une marche inverse de celle qu'on vient de suivre, s'en est servi pour en déduire la relation (2). (*Voir* le Mémoire cité au n° 1; *voir* aussi, au sujet des questions 951 et 952, le *Cours complémentaire d'Analyse et de Mécanique rationnelle*, par J. VIEILLE; 2e Partie, Chap. XI, n° 11.)

3° Prenant la dérivée des deux membres de l'équation

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n}+\cos\frac{3x}{2^n}+\cos\frac{5x}{2^n}+\ldots+\cos\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right]$$
$$=\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\frac{x}{2^n}}\,\frac{\sin x}{x},$$

et faisant ensuite grandir n à l'infini, on obtient cette autre formule

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sin\frac{x}{2^n}+3\sin\frac{3x}{2^n}+5\sin\frac{5x}{2^n}+\ldots\right.\\&\qquad\left.+(2^n-1)\sin\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right]\\&=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x},\quad\text{pour}\quad n=\infty.\end{aligned}\right.$$

6. Soit la formule

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots+\sin[a+(k-1)b]$$
$$=\frac{\sin\frac{kb}{2}\sin\left(a+\frac{k-1}{2}b\right)}{\sin\frac{b}{2}},$$

qui fait connaître la somme des sinus de k arcs en progression par différence. Faisons-y

$$a=\frac{x}{2^n},\quad b=\frac{x}{2^{n-1}},\quad k=2^{n-1};$$

nous en conclurons, en observant que $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2^{n-1}}\left[\sin\frac{x}{2^n} + \sin\frac{3x}{2^n} + \sin\frac{5x}{2^n} + \ldots + \sin\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right] \\ &= \frac{1-\cos x}{x}, \quad \text{pour} \quad n = \infty, \end{aligned} \right.$$

et, par la différentiation,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n} + 3\cos\frac{3x}{2^n} + 5\cos\frac{5x}{2^n} + \ldots \right. \\ &\qquad\qquad \left. + (2^n-1)\cos\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right] \\ &= \frac{\sin x}{x} - \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \text{pour} \quad n = \infty, \end{aligned} \right.$$

résultats assez remarquables, je crois, pour mériter d'être signalés.

Les formules (3), (4), (5), (6), et d'autres analogues qui s'ensuivent, peuvent être rapprochées des relations démontrées par M. Catalan dans son *Traité élémentaire des Séries*, p. 58, et dans une Note sur les séries divergentes, publiée dans les *Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 195.

RÉPONSE

aux observations critiques de M. Catalan, insérées dans le numéro d'octobre 1869 des « Nouvelles Annales de Mathématiques » ;

PAR M. F. VALLÈS.

C'est certainement par suite d'une méprise que M. Catalan m'a attribué l'opinion que, de la suite d'égalités

$$(A)\qquad e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}} = \ldots = e^{2k\pi\sqrt{-1}},$$

on peut légitimement déduire la suivante ;

(B) $$e^{-2\pi} = e^{-4\pi} = \ldots = e^{-2k\pi}.$$

Voici, en effet, la reproduction textuelle du passage de mon livre dans lequel il est question de ces faits.

« Pour les géomètres qui considèrent que le développement de e^x, en série, continue de subsister comme vrai lorsque x devient $x\sqrt{-1}$, qui par suite sont obligés d'admettre qu'il est permis d'élever l'expression e^x à la puissance $\sqrt{-1}$, qui indiquent même en fait comment on doit procéder sur e^x pour obtenir le résultat développé de cette opération, il est facile de leur prouver que cette manière de concevoir le mécanisme analytique conduit directement à une impossibilité. En effet, dans la suite d'égalités (A), qu'on élève tous les membres à la puissance $\sqrt{-1}$, et l'on aura $e^{-2\pi} = e^{-4\pi} \ldots = e^{-2k\pi} \ldots$ (B), conséquence complétement inadmissible. »

Il ressort évidemment de la lecture de ce passage que la première des deux propositions que me reproche M. Catalan n'exprime nullement mon opinion sur le point de savoir si les égalités (B) sont des conséquences légitimes des égalités (A) ; elle se borne à constater que, *pour les géomètres qui raisonnent d'après les idées que je viens d'exposer*, cette conséquence est obligatoire et qu'elle les condamne. Mais elle ne l'est pas plus pour moi, qui déclare ne pas savoir quant à présent ce que peut être la puissance $\sqrt{-1}$ d'une quantité réelle, et qui ignore les règles de calcul autorisées pour une pareille expression, qu'elle ne le sera pour tous ceux qui répudient la manière de voir des géomètres précités et qui ont des idées toutes différentes des leurs.

Et non-seulement je suis loin de prétendre que les égalités (B) doivent être considérées comme des déduc-

tions acceptables de celles (A), mais je ne saurais même admettre, avec M. Catalan, que la puissance $\sqrt{-1}$ de l'expression $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ a une infinité de valeurs réelles, inégales, formant une progression par quotient et représentées par $e^{-2k\pi}$.

Remarquons d'abord qu'en fait, poser $e^{-2k\pi}$ comme la conséquence de l'élévation de $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ à la puissance $\sqrt{-1}$, c'est admettre implicitement que les règles de l'élévation aux puissances démontrées pour les exposants réels continuent de s'appliquer aux exposants imaginaires, puisque alors $(e^{2k\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}}$ peut s'écrire $e^{2k\pi\sqrt{-1}\sqrt{-1}}$ et devient $e^{-2k\pi}$, ainsi que l'indique M. Catalan. Or, non-seulement cela n'est pas prouvé, mais l'auteur ne niera pas que cela ne soit très-contestable, puisqu'il prétend lui-même que *l'expression puissance $\sqrt{-1}$ n'a aucun sens à priori*. Or il paraîtra toujours bien difficile de comprendre comment un résultat certain, rigoureux, qu'on doit accepter avec confiance pourra être engendré par une opération qu'on déclare n'avoir pas de sens. L'hésitation, dans ce cas, nous paraît on ne peut plus légitime.

Il est vrai qu'*à posteriori* l'auteur parvient à déduire un résultat réel de cet entassement d'imaginaires; mais il est facile de faire voir que sa déduction, loin d'être obligatoire, reste toujours sur le terrain conventionnel.

En effet, dit-il, puisque par convention $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ est égal à 1, nous pourrons écrire

$$(e^{2k\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = 1^{\sqrt{-1}}.$$

Or, si l'on fait $1^{\sqrt{-1}} = y$, on aura, d'après Sturm,

$$ly = \sqrt{-1}\,l(1) = \sqrt{-1}\,2k\pi\sqrt{-1} = -2k\pi.$$

Mais, ferons-nous observer, si l'expression puissance $\sqrt{-1}$

n'a aucun sens, sur quoi donc pourra-t-on s'appuyer pour se croire autorisé à dire que le logarithme de $1^{\sqrt{-1}}$ doit s'obtenir en se conformant aux règles démontrées pour les exposants réels, et à écrire par conséquent que ce logarithme a pour valeur $\sqrt{-1}\, l(1)$? Puis, en remplaçant dans ce résultat $l(1)$ par $l(e^{2k\pi\sqrt{-1}})$, n'est-ce pas la convention primitive même qu'on reproduit? Or, répétérons-nous, comment cette convention vous autorise-t-elle à affirmer que le logarithme dont il s'agit ne sera autre chose que l'exposant de e, alors que cet exposant est imaginaire et que cette manière de procéder n'a été démontrée que pour le réel.

Sturm, dans son *Cours d'analyse*, s'est bien gardé de rien affirmer à cet égard; après avoir établi la relation *conventionnelle*

$$a + b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2} l(a^2+b^2) + (2k\pi+\varphi)\sqrt{-1}},$$

ayant recours à une seconde hypothèse, il ajoute : *Si l'on convient* d'appeler *logarithme népérien* de $a + b\sqrt{-1}$ l'exposant imaginaire de e dans l'égalité précédente, on aura, etc.; ce qui revient exactement à dire que les résultats qu'on obtiendra ne subsisteront qu'en vertu de l'hypothèse que les logarithmes des quantités imaginaires s'obtiennent en se conformant aux règles démontrées et suivies pour le réel, et de plus, qu'on le remarque bien, en appliquant ces règles à des expressions qui ne sont que conventionnelles. Pour nous, il nous semble qu'au fond on ne professe guère ici que de l'arbitraire déguisé, quant à la forme, sous le manteau de l'algèbre.

M. Catalan conteste, en second lieu, que la formule

$$(-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

que je propose de substituer à celle d'Euler, soit préfé-

rable à cette dernière, et voici le raisonnement sur lequel il appuie cette opinion :

« Si l'on pose, dit-il, $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, p et q étant des entiers premiers entre eux, la formule devient

$$(-1)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}\pi;$$

celle-ci, évidente lorsque $q = 1$, n'est pas admissible en général. En effet, le premier membre a q valeurs et le second en a seulement une. »

Examinons, à ce sujet, sous quelles conditions on peut dire que $(-1)^{\frac{p}{q}}$ est susceptible de q valeurs.

La quantité -1 est égale à $\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi$; mais elle reste encore égale à cette même expression lorsqu'on la modifie, par l'addition à π, d'un nombre quelconque de circonférences; de telle sorte qu'on a généralement

$$\cos(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\sin(2k+1)\pi = -1.$$

Tant que l'exposant p, auquel on élève cette quantité, est entier et impair, le résultat de l'élévation à la puissance p sera toujours évidemment -1.

Mais si, p restant impair, on prend pour exposant $\frac{p}{q}$, à cause que k est indéterminé, le résultat de l'opération pourra s'écrire $\cos\frac{2k+1}{q}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{q}$, et l'on obtiendra q valeurs, parce que, *en vertu de la variation de* k, la fraction $\frac{2k+1}{q}$ est elle-même susceptible d'en recevoir un nombre q qui sont distinctes.

Ce n'est donc qu'à la condition qu'on introduit tacitement dans la formule la variable k et qu'en définitive on

opère sur $(-1)^{\frac{p}{q}(2k+1)}$, qu'il est permis de dire que le premier membre a q valeurs.

Or, si l'on veut, au contraire, que α soit égal, non plus à $\frac{p}{q}(2k+1)\pi$, avec toute la latitude qui résulte de k variable, mais à $\frac{p}{q}\pi$ seulement, comme le suppose M. Catalan, c'est-à-dire si l'on s'impose la condition que k est nul, le premier membre, comme le second, ne sera susceptible que d'une valeur; ce qui fait disparaître l'anomalie signalée.

Le cas où p serait pair se traiterait d'une manière analogue, et nous n'y insisterons pas.

En un mot, ce n'est que par l'introduction non apparente, mais très-réelle, d'une variable k que le premier membre reçoit q valeurs. Mais ces valeurs se réduiront à une seule toutes les fois qu'on fera une hypothèse quelconque détruisant la variabilité de k et assignant à cette quantité une valeur fixe et unique.

Je ne veux pas abuser, en prolongeant cette discussion, de l'hospitalité qui m'a été gracieusement offerte dans les *Annales*. Je ne donnerai donc pas ici à l'exposé de ces points de doctrine très-délicats tout le développement qu'il comporte. Qu'il me soit seulement permis de dire que, dans la publication qui aura pour objet la représentation analytique des directions dans l'espace, je reviendrai sur ces questions avec tous les détails nécessaires; que je m'expliquerai alors sur tout ce qui se rattache aux exposants fractionnaires, non-seulement dans ma formule, mais encore dans celle de Moivre; qu'enfin je compléterai la théorie de cette dernière pour le cas où l'exposant réel α devient $\alpha\sqrt{-1}$, et que je ferai connaître les règles de calcul qui, dans cette circonstance, lui sont applicables.

Je ne saurais clore ces observations sans adresser à M. Catalan tous mes remercîments. Non-seulement je lui dois de la reconnaissance pour l'opinion favorable qu'il a exprimée sur la généralité de mon œuvre, mais encore et surtout pour les réflexions critiques que la lecture du livre lui a inspirées. Cela prouve qu'il m'a étudié avec attention, chose fort rare aujourd'hui et par conséquent très-méritoire pour celui qui la pratique et très-flatteuse pour celui qui en est l'objet. Quelques légers désaccords sur certains détails ne nous feront pas prendre le change sur cette mutualité de pensées qui nous pousse l'un et l'autre vers la recherche de la vérité.

ÉTUDE SUR LA SPHÈRE;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI,

Agrégé, Professeur à Mont-de-Marsan.

I.

Soit un arc de grand cercle OX (*) passant par un point fixe O, pris comme pôle; un point M, sur la sphère, est déterminé par l'angle MOX, et l'arc de grand cercle OM. Quand ce dernier est supérieur à π, M aura pour coordonnées $\omega = \text{MOX}$ et $\rho = -(2\pi - \text{OM})$.

II.

Considérons une courbe sphérique donnée par l'équation $\rho = f(\omega)$. Pour déterminer la tangente sphérique en un quelconque, M, de ses points, nous chercherons la tangente trigonométrique de l'angle V, qu'elle fait avec

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

le rayon vecteur correspondant, cet angle étant compté comme on le fait en géométrie analytique, avec les coordonnées polaires.

Soit M′ un point de la courbe, infiniment voisin de M, et prenons sur OM′, OP = OM. Le triangle sphérique MPM′, rectangle en P, nous donne

$$\sin M' = \sin MM' \sin MP,$$
$$\sin M = \sin MM' \sin M'P,$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \lim. \frac{\sin MP}{\sin M'P} = \lim. \frac{MP}{M'P}.$$

Or, l'arc de petit cercle de rayon sphérique OM, et de pôle O, est égal à

$$\sin \rho . \Delta\omega \quad (R = 1).$$

Donc

$$\operatorname{tang} V = \lim. \frac{\sin \rho . \Delta\omega}{\Delta\rho} \times \lim. \frac{MP}{\sin \rho . \Delta\omega} = \frac{\sin \rho}{\rho'}.$$

Si nous posons

$$\operatorname{tang} \frac{\rho}{2} = u,$$

on peut écrire

$$\operatorname{tang} V = \frac{u}{u'}.$$

Il résulte de là, que si l'on trace la courbe plane $u = f(\omega)$, on pourra regarder comme correspondants deux points pris, l'un sur cette courbe, l'autre sur la courbe sphérique $\rho = f(\omega)$, et pour lesquels ω sera le même. En deux points correspondants, V a la même valeur.

III.

Soient maintenant $\rho = f(\omega)$, $\rho_1 = f_1(\omega)$ deux courbes sphériques. Les deux courbes planes correspondantes se-

ront $u = f(\omega)$, $u_1 = f_1(\omega)$. Si l'on a $uu_1 =$ const., les deux courbes planes sont réciproques, $\tang V + \tang V_1 = o$. On peut dire que les deux courbes sphériques sont réciproques ou inverses.

On peut arriver directement au même résultat. De $uu_1 =$ const. on tire

$$\frac{u'}{u} + \frac{u'_1}{u_1} = o \quad \text{ou} \quad \frac{u}{u'} = -\frac{u'}{u'_1}, \quad \tang V + \tang V_1 = o,$$

et *vice versâ*.

On voit facilement que sur la sphère, l'angle de deux lignes est égal à celui de leurs inverses.

IV.

La figure sphérique inverse d'un cercle est un cercle.

Soient, en effet, deux petits cercles de pôles P, P_1, et O un de leurs centres de similitude. Tout grand cercle mené par ce dernier point coupe les cercles P et P_1 sous le même angle, et l'on a

$$\tang V + \tang V_1 = o \quad \text{ou} \quad uu_1 = \text{const.}$$

Donc ces deux cercles sont réciproques.

Remarque. — Si l'on prend pour pôle un point d'un petit cercle, on obtient pour figure inverse un petit cercle, et jamais un grand cercle. Mais avec un pôle non situé sur le petit cercle on peut déterminer la constante de manière à obtenir un grand cercle. Enfin la figure inverse d'un grand cercle est un petit cercle.

V.

Dans un triangle sphérique, les trois arcs hauteurs, ou les trois arcs bissecteurs sont concourants. Transformons,

et nous trouverons les mêmes propriétés dans un triangle formé par les arcs de petits cercles.

Si dans un triangle sphérique de base constante, la différence entre la somme des deux angles adjacents à la base et le troisième est constante, le lieu du troisième sommet est un petit cercle qui passe par les deux sommets fixes.

Le théorème subsiste avec un triangle circulaire.

Le lieu des points de contact des petits cercles tangents entre eux et à deux grands cercles qui se coupent est un grand cercle qui passe par les points d'intersection des deux premiers.

En transformant, on trouve que le lieu des points de contact de deux petits cercles tangents entre eux et à deux petits cercles qui se coupent est un petit cercle qui passe par les points d'intersection des deux petits cercles donnés.

VI.

Les résultats précédents ont été obtenus par une transformation opérée sur la sphère. On peut y arriver autrement.

Remarquons d'abord que la courbe plane $u = f(\omega)$ n'est autre chose que la projection stéréographique de la courbe sphérique $\rho = f(\omega)$, en prenant pour point de vue le point diamétralement opposé au pôle, et pour tableau le plan du grand cercle perpendiculaire au rayon qui va au pôle.

Cela posé, prenons par exemple un triangle sphérique ABC de base AB constante, et dans lequel

$$A + B - C = \text{const.};$$

le lieu de C est un petit cercle qui passe par A et B. La projection stéréographique donne un triangle circulaire

plan a, b, c dans lequel

$$a + b - c = \text{const.}$$

a et b sont fixes. Le lieu de c est un cercle qui passe par a et b. Transformons par rayons vecteurs réciproques. La figure a, b, c obtenue est la projection stéréographique d'une figure sphérique A, B, C formée par des arcs de petits cercles, etc.

Ainsi la transformation étudiée revient à trois transformations successives par rayons vecteurs réciproques.

NOTE

Sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes;

Par M. ALLÉGRET,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Clermont.

Le Révérend M. Salmon a remarqué, dans son excellent *Traité sur les Courbes planes de degré supérieur* (nos 110 et autres), que l'équation polaire

$$r^m = a^m \cos m\theta,$$

dans laquelle r et θ désignent les coordonnées polaires d'un point d'une courbe, a un paramètre quelconque et m un nombre arbitraire positif ou négatif, comprend une famille nombreuse de courbes dont quelques-unes sont très-connues : par exemple, la droite ($m = -1$); le cercle ($m = 1$); une hyperbole équilatère ($m = -2$); la lemniscate de Bernoulli ($m = 2$); la parabole ($m = -\frac{1}{2}$); une épicycloïde ($m = \frac{1}{2}$); la caustique par réflexion d'une parabole, lorsque les rayons lumineux sont perpendiculaires à l'axe ($m = -\frac{1}{3}$), etc.

On démontre que la *podaire* de l'une quelconque de ces courbes appartient à la même famille, et que ces courbes se transforment les unes dans les autres par la méthode des *vecteurs inverses* ou par celle des *polaires réciproques*; les arcs de ces courbes s'expriment aussi par les *transcendantes elliptiques* ou *abéliennes* les plus simples. (*Voir* l'ouvrage cité.)

Je ne sache pas qu'on ait observé encore que le cercle osculateur en un point quelconque d'une de ces courbes peut se construire presque aussi facilement que la tangente ou la normale au même point, en utilisant la propriété suivante, qui me paraît assez curieuse, et qui consiste en ce théorème :

Le cercle osculateur en un point quelconque de la courbe représentée par l'équation précédente

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

intercepte sur le rayon vecteur mené au point de contact une corde qui est toujours avec ce rayon dans le rapport constant de 2 *à* $1+m$.

La démonstration de ce théorème est extrêmement facile.

En effet, si l'on représente par ρ le rayon du cercle osculateur, on sait qu'on a, par une formule très-connue (*voir,* par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Sturm, n° 255),

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

D'autre part, le cosinus de l'angle u que fait la normale à la courbe avec le rayon vecteur mené à son pied a pour

expression

$$\cos u = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

La corde interceptée par le cercle osculateur sur ce rayon est donc égale à

$$\frac{2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Si l'on substitue dans cette formule les valeurs de r, $\frac{dr}{d\theta}$ et $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ tirées de l'équation de la courbe, et si l'on prend ensuite le rapport de la corde au rayon r, on vérifie que ce rapport est constant et égal à $\frac{2}{1+m}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il est non moins aisé de s'assurer, en outre, que la propriété dont il s'agit ne s'applique qu'aux courbes précédentes; mais je crois inutile de m'arrêter plus longtemps sur ce sujet.

NOTE SUR LA QUESTION 924;

PAR M. CRETIN,
Professeur au lycée d'Angers.

La solution de la question 924, insérée dans le numéro de juillet, se compose de deux lieux géométriques. Un seul convient à la question, et voici comment les calculs peuvent être dirigés pour le trouver seul.

Je conserve la notation de M. Millasseau.

De l'équation de la développée, on tire

$$\alpha - p = \frac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}};$$

d'où

$$x_0 = -p^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}, \quad y_0 = \pm \frac{1}{2} p^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{1}{3}}.$$

Or, $\beta^{\frac{1}{3}}$ étant donné, le point P de la développée est parfaitement déterminé. Il en est donc de même du point A. Donc y_0 ne doit avoir qu'une seule détermination, et on vérifiera facilement que

$$y_0 = + \frac{1}{2} p^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{1}{3}}.$$

Cela posé, on a

$$(1) \qquad 2x = p + \frac{1}{2} p^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}},$$

$$2y = \beta + \frac{1}{2} p^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{1}{3}}.$$

L'élimination de β conduit à la seule équation

$$y = \frac{8x - 3p}{2} \sqrt{\frac{2(2x - p)}{p}}.$$

L'équation (1) montre en outre que β variant de o à l'infini, $2x - p$ varie, de même, d'une manière continue de o à l'infini ; d'où l'on conclut que toute la courbe répond à la question.

Si pour y_0 on adoptait l'autre détermination on trouverait le lieu

$$y = \frac{8x - 5p}{2} \sqrt{\frac{2(2x - p)}{p}}.$$

APPLICATION DU CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES A LA SOLUTION DES QUESTIONS 955, 956

(voir 2e série, t. VIII, p. 132);

PAR M. BELLAVITIS (*).

955. — *En deux points d'une ellipse on mène les normales; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde passe par les milieux des segments interceptés entre les normales par chacun des axes.*

(LAGUERRE.)

956. — *En deux points d'un ellipsoïde on mène les normales. Le plan mené par le milieu de la corde et perpendiculairement à cette corde passe par les milieux des lignes qui joignent les points de rencontre des normales avec chacun des plans de symétrie.*

(LAGUERRE.)

Il suffit évidemment de résoudre la seconde question.

Considérons un ellipsoïde dont les demi-axes ont pour longueurs a, b, c; soient i, j, k trois droites égales, parallèles aux axes, et x, y, z trois variables assujetties à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

ax, by, cz seront les coordonnées rectangulaires d'un point M de l'ellipsoïde, et la droite OM, qui joint le centre à ce point, sera donnée par l'équipollence

$$\text{OM} \mathrel{\underline{\triangle}} axi + byj + czk.$$

(*) Nous publions la solution de M. Bellavitis comme application du calcul des équipollences à une question de l'espace. L'analyse ordinaire fournirait une solution aussi simple. (J. B.)

Supposons z constant et déplaçons infiniment peu le point M : $adxi + bdyi$, c'est-à-dire $ayi - bxj$, donnera la direction du déplacement, qui n'est autre chose que celle de la tangente à l'ellipsoïde menée par le point M, parallèlement au plan ij. De même, $bzj - cyk$, $azi - cxk$, sont les directions des tangentes parallèles aux plans jk, ki. Donc, la direction

$$\frac{x}{a} i + \frac{y}{b} j + \frac{z}{c} k,$$

qui est perpendiculaire aux trois précédentes, est la direction de la normale en M.

Considérons maintenant la droite MN donnée par l'équipollence

$$\mathrm{MN} \triangleq - c^2 \left(\frac{x}{a} i + \frac{y}{b} j + \frac{z}{c} k \right);$$

nous avons

$$\mathrm{ON} \triangleq \mathrm{OM} + \mathrm{MN} \triangleq \left(a - \frac{c^2}{a} \right) xi + \left(b - \frac{c^2}{b} \right) yj.$$

Cette dernière équipollence ne renferme pas de terme en k. Donc la droite ON est située dans le plan principal parallèle aux ij, et le point N est le point où la normale MN perce ce plan.

Soient M′ un autre point quelconque de l'ellipsoïde, N′ le pied de la normale en ce point, on aura de même

$$\mathrm{OM'} \triangleq ax'i + by'j + cz'k,$$
$$\mathrm{ON'} \triangleq \left(a - \frac{c^2}{a} \right) x'i + \left(b - \frac{c^2}{b} \right) y'j,$$

et la corde MM′ sera donnée par l'équipollence

$$\mathrm{MM'} \triangleq a(x' - x)i + b(y' - y)j + c(z' - z)k.$$

Désignons par D le milieu de MM′, par E celui de NN′,

on a

$$\mathrm{OD} \bumpeq \frac{a}{2}(x + x')\,i + \frac{b}{2}(y + y')\,j + \frac{c}{2}(z + z')\,k,$$

$$\mathrm{OE} \bumpeq \left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a}\right)(x + x')\,i + \left(\frac{b}{2} - \frac{c^2}{2b}\right)(y + y')\,j.$$

On en déduit

$$\mathrm{ED} \bumpeq \mathrm{OD} - \mathrm{OE} \bumpeq \frac{c^2}{2a}(x + x')\,i + \frac{c^2}{2b}(y + y')\,j + \frac{c}{2}(z + z')\,k.$$

Or, à cause de l'identité

$$(x + x')(x' - x) + (y + y')(y' - y) + (z + z')(z' - z) = 1 - 1 = 0,$$

cette droite est perpendiculaire à la corde MM'. Donc, le théorème est démontré.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GAUSS RELATIF AUX SÉRIES;

PAR M. CHARLES BRISSE,
Ancien Élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Lemme I. — Le rapport d'un terme au précédent ayan pour limite l'unité, mettons-le sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, o α a pour limite zéro, la série sera convergente s lim. $n\alpha > 1$, et divergente si lim. $n\alpha < 1$.

Lemme II. — Si lim. $n\alpha = 1$, mettons α sous la form $\frac{1}{n} + \beta$, où $n\beta$ a pour limite zéro; la série sera convergent si lim. $n\beta(l.n) > 1$, et divergente si lim. $n\beta(l.n) < 1$.

C'est en nous appuyant sur ces deux lemmes, généra —

lement démontrés dans les cours, que nous allons établir le théorème de Gauss dont voici l'énoncé :

Théorème. — *Le rapport d'un terme au précédent ayant pour limite l'unité et étant de la forme*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots},$$

c'est-à-dire s'exprimant par une fraction rationnelle de n, il faut et il suffit que

$$A - a > 1$$

pour que la série soit convergente.

En appliquant le lemme I, on trouve

$$\alpha = \frac{(A-a)n^{\lambda-1} + (B-b)n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$n\alpha = \frac{(A-a)n^\lambda + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$\lim. n\alpha = A - a.$$

Donc, si $A - a > 1$ la série est convergente, et si $A - a < 1$ la série est divergente.

Supposons donc $A - a = 1$, et appliquons le lemme II, on a

$$\frac{1}{n} + \beta = \frac{n^{\lambda-1} + (B-b)n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$n\beta = \frac{(B-b)n^{\lambda-1} + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$n\beta(l.n) = \frac{l.n}{n} \cdot \frac{(B-b)n^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda-1} + \ldots},$$

d'où

$$\lim. n\beta(l.n) = 0.$$

Donc la série est divergente.

NOTE ADDITIONNELLE A LA SPIRALE ÉQUIANGLE;

(voir 2e série, t. VIII, p. 5);

PAR M. WILLIAM WHITWORTH.

Traduit de *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, par M. CHARLES BRISSE, Ancien Élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Le lecteur a sans doute remarqué que la propriété énoncée dans la proposition II de notre premier article n'est pas spéciale à la spirale équiangle et appartient à une courbe quelconque. En outre, comme cette spirale ne dépend pas d'un *paramètre linéaire*, mais seulement d'un *paramètre angulaire*, toutes les spirales équiangles semblables sont égales, et on peut les superposer de manière à ce qu'elles coïncident dans toute leur étendue. Nous serions donc resté dans la vérité en disant : « Le lieu du sommet Q sera une spirale semblable et *égale*. »

Une conséquence intéressante de cette proposition est celle que nous donnons ci-après. Quoique presque aussi ancienne que la spirale elle-même, elle n'a cependant pas encore perdu tout intérêt, comme le prouve une note du *Mathematical Tripos Examination*, lundi matin, 13 janvier 1862.

PROPOSITION. — *Si des rayons lumineux émanés du pôle d'une spirale équiangle sont réfléchis ou réfractés par elle, les caustiques obtenues seront des spirales semblables à la spirale originaire.*

Soient OP, Op (*) deux rayons polaires quelconques de la spirale; OQ, Oq deux autres rayons polaires, faisant respectivement des angles égaux POQ, pOq avec les premiers.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure, en se guidant sur celle du précédent article.

Soit R le point de rencontre des rayons réfléchis ou réfractés en P et Q, r celui des rayons réfléchis ou réfractés en p et q. Alors OQPR, Oqpr sont des figures semblables, et si Q et q tendent respectivement vers P et p, les angles POQ, pOq restant toujours égaux l'un à l'autre, OPR et Opr sont toujours des triangles semblables. Par conséquent, si V, ν sont les positions limites de R, r quand les angles POQ, pOq diminuent indéfiniment, OPV et O$p\nu$ seront des triangles semblables. Mais V, ν sont les points de la caustique qui correspondent à P, p. Donc (Proposition II) le lieu des points V, ν, c'est-à-dire la caustique, est une spirale équiangle semblable à la première. Donc, etc. C. Q. F. D.

Le fait que la spirale équiangle ne dépend pas d'un paramètre linéaire semble, à première vue, contradictoire avec cet autre fait que son équation polaire en renferme un. Mais la contradiction n'est qu'apparente, et disparaît si l'on remarque que les équations

$$r = a\varepsilon^{\mu\theta}, \quad r = b\varepsilon^{\mu\theta}$$

représentent la même courbe dans deux positions différentes faisant entre elles un angle égal à $\frac{1}{\mu}\log\frac{a}{b}$, ou dans la même position si $a = b\varepsilon^{2r\mu\pi}$, r étant un entier quelconque. Par conséquent, la constante de l'équation de la spirale n'est pas relative à la grandeur de la courbe, ce n'est pas un paramètre; elle fixe seulement la position de la courbe en indiquant la longueur du rayon vecteur qui coïncide avec l'axe polaire.

La définition de la spirale donnée à l'article précédent a soulevé une difficulté. On a dit que le cercle était un cas limite de la spirale équiangle, que le centre en était le pôle, et que notre définition ne s'appliquait plus à ce cas.

Nous demanderons aux personnes qui soulèvent la dif-

ficulté s'il ne serait pas plus exact de dire que la limite d'une spirale équiangle dont l'angle approche indéfiniment d'un droit est un système de cercles concentriques ayant leur centre commun au pôle, en nombre indéfini, dont le rayon passe par toutes les valeurs, et qui couvrent entièrement le plan. Dans ces conditions, on ne pourrait pas dire qu'un cercle est plutôt qu'un autre la limite vers laquelle tend une spirale équiangle dont l'angle approche indéfiniment d'un droit.

Portarlington, 18 février 1862.

TRISECTION DE L'ANGLE AU MOYEN DU LIMAÇON DE PASCAL;

PAR M. JOUANNE,
Professeur au lycée de Caen.

Soit l'angle CAB à diviser en trois parties égales : à droite et à gauche du sommet A, sur AC et son prolongement, on prend des longueurs égales OA et AD; du point O comme centre et avec OA pour rayon on décrit une circonférence; puis on décrit sa podaire par rapport au point D. C'est le limaçon de Pascal dont l'axe de symétrie est CD. Du point B où le côté AB rencontre cette courbe, on mène une tangente BT à la circonférence OA; la ligne AT qui joint le sommet de l'angle au point de contact forme l'angle $CAT = \frac{CAB}{3}$.

En effet, il est évident que le point B est le pied de la perpendiculaire abaissée du point D sur la tangente BT : or, si l'on prolonge le rayon OA d'une longueur égale à lui-même et que du point D ainsi obtenu on abaisse une perpendiculaire sur une tangente BT, en joignant le pied B au point A on obtient un angle $ABD = \frac{OAB}{3}$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 957

(voir 2e série, t. VIII, p. 479);

SOLUTION DE MM. A. BOTTIGLIA ET F. ISAIA,
Élèves de M. Genocchi, à Turin.

On décrit sur une droite AB, *comme diamètre, une demi-circonférence* AMB, *et de l'autre côté de la droite* AB *un rectangle* ABB′A′ *ayant pour base* AB *et pour hauteur une droite* BB′ *égale au côté du carré inscrit dans le cercle dont* AB *est le diamètre; puis, d'un point* M *pris arbitrairement sur la demi-circonférence* AMB *on mène aux deux sommets* A′, B′ *du rectangle les droites* MA′, MB′ *qui coupent le diamètre* AB *en des points* C, D. *Démontrer que* $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

(FERMAT.)

Les deux triangles semblables AA′C, CMP (*) donnent

$$AC : CP = AA' : MP;$$

les deux triangles aussi semblables MPD, B′BD donnent

$$BD : PD = AA' : MP;$$

de là,

$$AC : CP = BD : PD,$$

(*) La droite MP est la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre AB.

ou mieux,

$$AC : AP - AC = (AB - AD) : (AD - AP),$$

et composant

$$AP : AC = (AB - AP) : (AB - AD),$$

d'où

$$AP = \frac{AB.AC}{AB - (AD - AC)}.$$

Les deux triangles semblables A'MB', CMD donnent

$$(AD - AC) : AB = MP : MP + \tfrac{1}{2} AB\sqrt{2};$$

divisant,

$$AB - (AD - AC) : AD - AC = \tfrac{1}{2} AB\sqrt{2} : MP;$$

d'où

$$MP = \frac{(AD - AC) AB\sqrt{2}}{2[AB - (AD - AC)]}.$$

Or, on a

$$\overline{MP}^2 + \overline{AP}^2 = AB.AP;$$

en substituant, dans cette dernière égalité, les valeurs de AP et PM, ci-dessus trouvées, on a

$$4\overline{AB}^2.\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2.\overline{AD}^2 + 2\overline{AB}^2.\overline{AC}^2 - 4\overline{AB}^2.AC.AD$$
$$= 4\overline{AB}^3.AC - 4\overline{AB}^2.AC.AD + 4\overline{AB}^2.\overline{AC}^2;$$

simplifiant,

$$\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = 2AB.AC$$

ou

$$\overline{AD}^2 + (AB - BC)^2 = 2AB(AB - BC);$$

enfin, faisant les produits et simplifiant, on a

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer (*).

Nous avons aussi trouvé la solution par la Géométrie analytique; mais elle est trop simple, nous ne l'envoyons pas.

Note. — Le même théorème a été démontré par MM. J. Mouchel, conducteur des Ponts et Chaussées à Albert (Somme); Burtaire, Maître auxiliaire au lycée de Nancy; Chadu, Maître auxiliaire au lycée de Bordeaux; Laverlochère, élève de Mathématiques spéciales au collége Stanislas; Viaud, élève, à la Rochelle; Kruschwitz; H. Lez, à Lorrez-le-Bocage; F.-P. Pourcheiroux, à Paris; O. Callaudreau, à Angoulême; Berger et Chaurin, élèves de la classe de seconde au lycée du Mans.

(*) L'égalité à démontrer : $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ se réduit à $\overline{CD}^2 = 2.AC.BD$, en y remplaçant respectivement AD, BC, AB par AC + CD, BD + CD, AC + CD + BD. Or, si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite A'B' en un point P', la similitude des triangles MA'P', CAA' donnera

$$\frac{MP'}{AA'} = \frac{A'P'}{AC};$$

on aura de même

$$\frac{MP'}{AA'} = \frac{B'P'}{BD}.$$

De là

$$\frac{\overline{MP'}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{A'P'.B'P'}{AC.BD} = \frac{\overline{MP}^2}{AC.BD}.$$

Mais

$$\frac{M'P'}{MP} = \frac{A'B'}{CD};$$

donc

$$\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{AC.BD}, \quad \text{ou} \quad 2 = \frac{\overline{CD}^2}{AC.BD}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(G.)

Sur la question 870

(voir 2e série, t. VIII, p. 463);

PAR M. TERRATS,
Professeur au collége d'Arras.

Dans le numéro d'octobre des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la question 870 se trouve résolue d'une manière fautive, ou plutôt l'auteur de l'article a substitué à la question proposée la question suivante : Trouver le lieu des centres de courbure des sections perpendiculaires à une même génératrice, sur une surface gauche. Après avoir substitué à la surface proposée l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée, il fait, en effet, une série de sections par des plans perpendiculaires à cette génératrice. Ces plans ne sont pas ceux des sections principales, parce que les tangentes aux sections principales en un point de l'hyperboloïde, sont les bissectrices des angles que font les deux génératrices qui passent en ce point. Je proposerai pour la question énoncée par M. Darboux la solution suivante :

Substituons encore à la surface gauche l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice considérée. Mais prenons cette génératrice pour axe des X et non des Z, afin d'éviter l'indétermination qui se présenterait dans le calcul des coefficients différentiels p et q.

L'équation de cet hyperboloïde sera évidemment de la forme

$$(1)\quad A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2C'y + 2C''z = 0.$$

Les équations de la normale au point (x, o, o) sont

$$X = x, \quad \frac{Y}{B''x + C'} = \frac{Z}{B'x + C''}.$$

La surface lieu des normales le long de la génératrice est donc

$$\frac{Y}{B''X+C'}=\frac{Z}{B'X+C''},$$

ou

$$B'XY-B''XZ+C''Y-C'Z=0,$$

équation d'un paraboloïde hyperbolique.

Il reste à trouver une seconde équation. Or, on sait que les Z des centres de courbures principaux en un point (x, y, z) d'une surface, sont donnés par l'équation

$$(rt-s^2)(Z-z)^2$$
$$-[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs](Z-z)+1+p^2+q^2=0.$$

Il faut ici supposer $z=0$, et calculer

$$p,\ q,\ r,\ s,\ t.$$

Pour cela, différentions l'équation (1) par rapport à x, puis par rapport à y. Nous trouverons

$$(2)\ \begin{cases} A''zp+Byp+B'z+B'xp+B''y+C''p=0, \\ A'y+A''zq+Bz+Byq+B'xq+B''x+C'+C''q=0. \end{cases}$$

Différentions maintenant les équations (2) par rapport à x et y. Nous trouverons de même

$$(3)\ \begin{cases} A''p^2+A''zr+Byr+B'p+B'p+B'xr+C''r=0, \\ A''pq+A''zs+Bp+Bys+B'q+B'xs+B''+C''s=0, \\ A'+A''q^2+A''zt+Bq+Byt+Bq+B'xt+C''t=0. \end{cases}$$

De ces équations on déduit pour le point $(x, 0, 0)$ les valeurs

$$p=0,\quad q=-\frac{B''x+C'}{B'x+C''},$$

$$r=0,\quad s=-\frac{B'q+B''}{B'x+C''},\quad t=-\frac{A''q^2+Bq+A'}{B'x+C''},$$

qui doivent être substituées dans l'équation simplifiée

$$(4)\qquad s^2Z^2+tZ-(1+q^2)=0.$$

Il faudra ensuite éliminer x entre l'équation obtenue et l'équation $X = x$. Ce qui revient à remplacer dans (4), q, s, t par les valeurs

$$q = -\frac{B''X + C'}{B'X + C''},\ s = -\frac{B'q + B''}{B'X + C''},\ t = -\frac{Aq^2 + Bq + A'}{B'X + C''}.$$

Le résultat sera une équation du quatrième degré entre X et Z. Elle représente un cylindre parallèle à l'axe des Y.

L'intersection de ce cylindre avec le paraboloïde des normales sera la courbe demandée.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre à M. Bourget.

Une erreur s'est glissée dans la rédaction de la question 960. Il existe bien, pour chaque surface du second ordre, un groupe de surfaces du même ordre qui jouissent de la propriété indiquée, mais ces surfaces ne sont pas homofocales à la première.

Permettez-moi, en faisant ici cette rectification, d'entrer à ce sujet dans quelques détails qui, malgré leur simplicité, pourront peut-être intéresser vos lecteurs.

Proposons-nous cette question : *Trouver deux surfaces* S *et* Σ *qui se correspondent point par point, de telle sorte que le plan mené perpendiculairement à la corde qui joint deux points quelconques* A *et* B *de la surface* S *et par le milieu de cette corde passe par le milieu de la corde* $\alpha\beta$ *qui joint les points correspondants sur la surface* Σ.

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque de S et (ξ, η, ζ) les coordonnées du point correspondant de Σ, en sorte que ξ, η, ζ sont des fonctions actuellement indéterminées de x, y et z; soient encore (x', y', z') les coordonnées d'un autre point arbitraire de S et (ξ', η', ζ')

les coordonnées du point qui lui correspond sur Σ. Si les deux surfaces S et Σ jouissent de la propriété énoncée ci-dessus, on devra avoir

$$(1)\quad \begin{cases} (\xi+\xi'-x-x')(x-x') \\ \quad +(\eta+\eta'-y-y')(y-y')+(\zeta+\zeta'-z-z')(z-z')=0. \end{cases}$$

Supposons maintenant que les relations qui existent entre les points correspondants des deux surfaces soient de la forme

$$(2)\qquad \xi=mx,\quad \eta=ny,\quad \zeta=pz,$$

m, n et p désignant des quantités constantes, l'équation (1) deviendra alors

$$(m-1)(x'^2-x^2)+(n-1)(y'^2-y^2)+(p-1)(z'^2-z)=0$$

ou bien

$$\begin{aligned}&(m-1)x'^2+(n-1)y'^2+(p-1)z'^2\\ &=(m-1)x^2+(n-1)y^2+(p-1)z^2.\end{aligned}$$

On satisfera donc d'une façon générale à l'équation (1), quels que soient les deux points donnés, si on les assujettit à rester sur la surface du second ordre

$$(m-1)x^2+(n-1)y^2+(p-1)z^2=\text{const.}$$

Faisons la constante égale à λ^2 et $m-1=\frac{\lambda^2}{a^2}$, $n-1=\frac{\lambda^2}{b^2}$, $p-1=\frac{\lambda^2}{c^2}$; a^2, b^2 et c^2 étant de nouvelles constantes, l'équation de la surface S deviendra

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et l'équation d'une quelconque des surfaces Σ sera, en vertu des formules de transformation (2),

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2+\lambda^2)^2}=1,$$

équation où λ désigne un paramètre arbitraire.

Il résulte immédiatement, soit des formules (2), soit encore de la propriété même qui a servi à définir les surfaces, que la droite qui joint un point quelconque A de S au point correspondant de Σ est normale en S au point A.

On voit immédiatement que les surfaces Σ peuvent être regardées comme le lieu des points qui partagent dans un rapport constant les portions des normales interceptées entre la surface S et un quelconque des plans de symétrie de cette surface.

Si l'on fait successivement $\lambda^2 = -a^2$, $-b^2$ et $-c^2$, la surface Σ se confond tour à tour avec les trois plans de symétrie de S; on peut donc faire correspondre chacun de ces plans avec S, et point par point de telle sorte que le mode de correspondance jouisse de la propriété indiquée. Le point correspondant sur un des plans de symétrie à un point donné A de S est évidemment le point de ce plan où passe la normale en A à la surface; d'où la solution d'une question que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales*. E. Laguerre.

QUESTION.

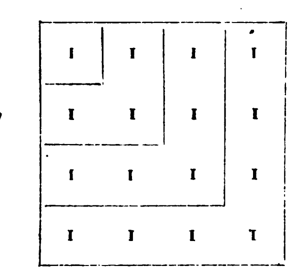
978. Soit une conique ayant pour foyer le point F, et soit n le pied de la perpendiculaire abaissée d'un foyer F sur la directrice correspondante; du foyer, abaissons les perpendiculaires Fm et Fm' sur deux tangentes quelconques et la perpendiculaire Fn' sur la corde qui joint les points de contact des tangentes; les quatre points m, m', n et n' sont sur une même circonférence, et ils partagent cette circonférence harmoniquement.

(E. Laguerre.)

NOTE SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Considérons le carré formé en plaçant les unes au-dessous des autres n rangées horizontales de n unités; on peut, comme on sait, grouper les n^2 unités de ce carré de manière à représenter la série des nombres impairs, et l'on voit facilement ainsi que *la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2*.



On peut, de la façon précédente, déterminer un certain nombre de sommes, et trouver, en particulier, quelques relations simples entre les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.

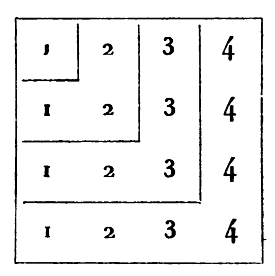
2. Considérons le carré formé en répétant n fois la rangée horizontale des n premiers nombres et décomposons ce carré de la même façon que nous l'avons fait ci-dessus.

La somme de tous les nombres renfermés dans le carré

est égale à n fois la somme s_1 des n premiers nombres, c'est-à-dire à

$$ns_1 = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

D'autre part, la somme des termes contenus dans le $p^{ième}$ groupe se compose de deux parties : la partie horizontale,



qui est égale à la somme des p premiers nombres, et la partie verticale, qui est égale à $(p-1)p$. Donc la somme des termes du $p^{ième}$ groupe est

$$p(p-1) + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p,$$

et, en additionnant tous les groupes, on obtient, en désignant par s_2 la somme des carrés de n premiers nombres,

$$\frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_1 = \frac{n^2(n+1)}{2},$$

d'où l'on tire

$$s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Considérons encore le carré formé par la table de Pythagore; la somme des termes renfermés dans cette

table est égale à la somme s_1 des n premiers nombres multipliée par $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$, c'est-à-dire égale à s_1^2.

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

D'autre part, la somme des termes du $p^{ième}$ groupe est égale à

$$2p(1 + 2 + \ldots + p) - p^2 = p^3.$$

Donc, en additionnant tous les groupes, on a

$$s_3 = s_1^2;$$

et on retrouve ainsi ce théorème connu, que *la somme des cubes des n premiers nombres est égale au carré de la somme de ces n premiers nombres.*

4. En opérant de même sur le carré formé en prenant les carrés des termes de la table de Pythagore, on voit que la somme de tous les termes est égale à s_2^2, et que la somme des termes du $p^{ième}$ groupe est égale à

$$2p^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2) - p^4 = \frac{p^3}{3}(2p^2 + 1);$$

d'où l'on tire

$$2s_5 + s_3 = 3s_2^2.$$

5. En appliquant le même raisonnement au carré formé des cubes des termes de la table de Pythagore, on

trouverait encore

$$s_7 + s_5 = 2s_3^2.$$

6. Au lieu de la série des nombres entiers, on peut encore considérer celle des nombres triangulaires, pyramidaux, etc.; celle des sinus des multiples de l'arc x; celle des puissances successives d'un nombre donné, etc.

Prenons, par exemple, le carré formé de la manière suivante. On dispose sur une ligne horizontale les nombres

$$\frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{2.3}, \quad \frac{1}{3.4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n(n+1)},$$

dont la somme est, comme on sait, égale à $\frac{n}{n+1}$, et on multiplie successivement tous les termes de cette ligne par chacun des termes $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \ldots$, pour former les 1re, 2e, 3e,... lignes d'un carré de n^2 termes, dont la somme totale est égale à $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$.

D'autre part, en décomposant ces groupes comme précédemment, on voit que la somme des termes du $p^{ième}$ groupe est égale à

$$2 \cdot \frac{1}{p(p+1)}\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)}\right] - \frac{1}{p^2(p+1)^2},$$

ou égale à

$$\frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2(p+1)^2};$$

et, en faisant la somme de tous les groupes, on a

$$2\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{(p+1)^2} - \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2(p+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

Si l'on fait, en particulier, $n = \infty$, on trouve

$$2\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^2(p+1)^2} = 1 \ (*),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{1^2.2^2} + \frac{1}{2^2.3^2} + \frac{1}{3^2.4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - 3.$$

TRIANGLES ET CONIQUES COMBINÉS;

PAR M. NEUBERG,

Professeur à l'Athénée royal de Bruges (Belgique).

M. Faure a énoncé dans les tomes XIX et XX des *Nouvelles Annales*, plusieurs propriétés très-intéressantes des coniques qui peuvent être considérées comme résolvant le problème de déterminer les axes de ces courbes, quand on en connaît le centre et un triangle inscrit, conjugué ou circonscrit. Je me propose ici le même problème en substituant au centre un foyer. Dans cette recherche je trouve quelques formules que je crois nouvelles, et j'arrive également aux deux théorèmes énoncés par M. Faure dans le tome XX des *Nouvelles Annales*, page 215.

En supposant des axes coordonnés rectangulaires passant par le foyer F, une conique peut être représentée par l'équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = (mx + ny + pz)^2 \quad (\text{où } z = 1).$$

(*) Puisque l'on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

(SERRET, *Traité de Trigonométrie*, p. 224.)

Les expressions des axes peuvent s'obtenir comme il suit. Pour avoir le paramètre $\frac{b^2}{a}$, qui est la longueur du rayon vecteur parallèle à la directrice, il suffit de faire dans l'équation (1), $mx + ny = 0$, ce qui donne $\frac{b^2}{a} = p$. L'excentricité numérique $\frac{c}{a}$ ou $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ est égale au rapport constant des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice ou égale à $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Des relations $\frac{b^2}{a} = p$, $1 - \frac{b^2}{a^2} = m^2 + n^2$, on tire, en posant $1 - m^2 - n^2 = q$,

$$(2) \qquad a = \frac{p}{q}, \quad b^2 = \frac{p^2}{q}, \quad a^2 b^2 = \frac{p^4}{q^3}.$$

Soient maintenant

$$\left(\frac{x_1}{z_1}\ \frac{y_1}{z_1}\right), \quad \left(\frac{x_2}{z_2}\ \frac{y_2}{z_2}\right), \quad \left(\frac{x_3}{z_3}\ \frac{y_3}{z_3}\right), \quad (z_1 = z_2 = z_3 = 1)$$

les cordonnées cartésiennes homogènes des sommets d'un triangle $A_1 A_2 A_3$ inscrit, conjugué ou circonscrit à la conique (1), S sa surface, R le rayon du cercle circonscrit et a_1, a_2, a_3 les longueurs des côtés. Désignons par X_r, Y_r, Z_r les dérivées suivant x_r, y_r, z_r du déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2S,$$

et posons, pour abréger,

$$\rho_{rs} = x_r x_s + y_r y_s, \quad t_r = m x_r + n y_r + p z_r.$$

Les valeurs de p et q, et par suite les axes, peuvent se déduire des quantités t_1, t_2, t_3 qu'on peut déterminer

facilement dans les différents cas. Car, en résolvant les équations

$$m x_r + n y_r + p z_r = t_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

par rapport à m, n, p, on trouve (*)

$$(3) \qquad m = \frac{(t_1 \;\; y_1 \;\; z_1)}{2S},$$

$$(4) \qquad n = \frac{(x_1 \;\; t_1 \;\; z_1)}{2S},$$

$$(5) \qquad p = \frac{(x_1 \;\; y_1 \;\; t_1)}{2S}.$$

La formule (5) donne aussi

$$-4S^2p^2 = (x_1 \;\; y_1 \;\; t_1\sqrt{-1})^2$$

ou

$$(5') \qquad -4S^2p^2 = (\rho_{11} - t_1t_1 \;\; \rho_{12} - t_1t_2 \;\; \rho_{13} - t_1t_3).$$

Des équations (3) et (4) on conclut

$$4S^2q = (x_1 \; y_1 \; 1)^2 + (t_1\sqrt{-1} \;\; y_1 \;\; 1)^2 + (x_1 \;\; t_1\sqrt{-1} \;\; 1)^2.$$

Le second membre prend une forme très-simple en le considérant comme le résultat de la multiplication des deux systèmes d'éléments

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & t_1\sqrt{-1} \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & t_2\sqrt{-1} \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & t_3\sqrt{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 & t_1\sqrt{-1} \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 & t_2\sqrt{-1} \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 & t_3\sqrt{-1} \end{vmatrix};$$

(*) Pour représenter un déterminant, nous écrirons souvent la première ligne entre parenthèses, si les autres lignes s'en déduisent par des permutations circulaires des indices.

donc

$$(6)\quad 4S^2q = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho_{11}-t_1^2 & \rho_{12}-t_1t_2 & \rho_{13}-t_1t_3 \\ 1 & \rho_{21}-t_1t_2 & \rho_{22}-t_2^2 & \rho_{23}-t_2t_3 \\ 1 & \rho_{31}-t_3t_1 & \rho_{32}-t_3t_2 & \rho_{33}-t_3^2 \end{vmatrix}.$$

Triangle inscrit. — En exprimant que les sommets sont situés sur la courbe, on trouve

$$\rho_{11}-t_1^2=0,\quad \rho_{22}-t_2^2=0,\quad \rho_{33}-t_3^2=0;$$

d'où

$$t_1=R_1,\quad t_2=R_2,\quad t_3=R_3,$$

R_1, R_2, R_3 étant les longueurs des rayons vecteurs FA_1, FA_2, FA_3 affectées de signes convenables (*). Désignons par ω_1, ω_2, ω_3 les angles que font ces rayons avec l'axe des X; nous aurons

$$x_1=R_1\cos\omega_1,\quad x_2=R_2\cos\omega_2,\quad x_3=\pm R_3\cos\omega_3,$$
$$y_1=R_1\sin\omega_1,\quad y_2=R_2\sin\omega_2,\quad y_3=\pm R_3\sin\omega_3.$$

On tire de là

$$\begin{aligned}\rho_{12}-t_1t_2 &= R_1R_2(\cos\omega_1\cos\omega_2+\sin\omega_1\sin\omega_2-1)\\ &= -2R_1R_2\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),\\ \rho_{23}-t_2t_3 &= -2R_2R_3\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)\\ \text{ou}\quad &= -2R_2R_3\cos^2\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3),\\ \rho_{31}-t_3t_1 &= -2R_3R_1\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)\\ \text{ou}\quad &= -2R_3R_1\cos^2\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1);\end{aligned}$$

(*) On sait qu'il existe quatre coniques qui passent par trois points donnés et ont un foyer en un point donné. L'une d'elles est une ellipse, une parabole ou une hyperbole dont une même branche passe par les trois points donnés; les trois autres sont des hyperboles dont une branche passe par deux des points et l'autre par le troisième point. Pour la première courbe, nous pouvons supposer R_1, R_2, R_3 positifs; pour les trois autres, nous admettons que A_1 et A_2 désignent les deux points situés sur la même branche, et nous considérons R_1 et R_2 comme positifs et R_3 comme négatif.

Voir la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, 4e édition, pages 219 et 220.

en substituant ces valeurs dans les formules (5), (5′) et (6), il vient

$$p = \frac{R_1Z_1 + R_2Z_2 + R_3Z_3}{2S},$$

$$-4S^2p^2 = 2(\rho_{12} - t_1t_2)(\rho_{23} - t_2t_3)(\rho_{31} - t_3t_1)$$

ou

$$p = \frac{2R_1R_2R_3}{S}\sin\frac{1}{2}(R_1R_2)\sin\frac{1}{2}(R_2R_3)\sin\frac{1}{2}(R_3R_1),$$

$$p = \frac{2R_1R_2R_3}{S}\sin\frac{1}{2}(R_1R_2)\cos\frac{1}{2}(R_2R_3)\cos\frac{1}{2}(R_3R_1);$$

$$4S^2q = -\Sigma(\rho_{12} - t_1t_2)^2 + 2\Sigma(\rho_{12} - t_1t_2)(\rho_{23} - t_2t_3)$$

ou

$$q = \frac{R_1^2R_2^2R_3^2}{S^2}\left[-\sum\frac{\sin^4\frac{1}{2}(R_1R_2)}{R_3^2} + 2\sum\frac{\sin^2\frac{1}{2}(R_1R_2)}{R_3}\frac{\sin^2\frac{1}{2}(R_2R_3)}{R_1}\right],$$

$$q = \frac{R_1^2R_2^2R_3^2}{S^2}\left[-\frac{\sin^4\frac{1}{2}(R_1R_2)}{R_3^2} - \frac{\cos^4\frac{1}{2}(R_2R_3)}{R_1^2} - \frac{\cos^4\frac{1}{2}(R_3R_1)}{R_2^2} + 2\frac{\sin^2\frac{1}{2}(R_1R_2)\cos^2\frac{1}{2}(R_2R_3)}{R_3R_1} + 2\frac{\sin^2\frac{1}{2}(R_1R_2)\cos^2\frac{1}{2}(R_3R_1)}{R_3R_2} + 2\frac{\cos^2\frac{1}{2}(R_2R_3)\cos^2\frac{1}{2}(R_3R_1)}{R_1R_2}\right].$$

De là on conclut facilement les expressions de a, b^2 et a^2b^2

Si la conique (1) est une parabole on a $q = 0$, ou, en décomposant la première valeur de q en facteurs,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(R_1R_2)}{\sqrt{R_3}} + \frac{\sin\frac{1}{2}(R_2R_3)}{\sqrt{R_1}} + \frac{\sin\frac{1}{2}(R_3R_1)}{\sqrt{R_2}} = 0.$$

Triangle conjugué. — On a les équations de condition

$$\rho_{12} - t_1 t_2 = 0, \quad \rho_{23} - t_2 t_3 = 0, \quad \rho_{31} - t_3 t_1 = 0;$$

on en déduit

$$t_1^2 = \frac{\rho_{12}\rho_{13}}{\rho_{23}}, \quad t_2^2 = \frac{\rho_{21}\rho_{23}}{\rho_{31}}, \quad t_3^2 = \frac{\rho_{31}\rho_{32}}{\rho_{12}},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\rho_{11} - t_1^2 &= \frac{1}{\rho_{23}}(\rho_{11}\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}) \\
&= \frac{1}{\rho_{23}} \begin{vmatrix} x_1 x_1 + y_1 y_1 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_3 x_1 + y_3 y_1 & x_3 x_2 + y_3 y_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho_{23}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = -\frac{Z_2 Z_3}{\rho_{23}},
\end{aligned}$$

$$\rho_{22} - t_2^2 = -\frac{Z_3 Z_1}{\rho_{31}}, \quad \rho_{33} - t_3^2 = -\frac{Z_1 Z_2}{\rho_{12}};$$

par conséquent

$$-4S^2 p^2 = (\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2) = -\frac{Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2}{\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}},$$

$$4S^2 q = \Sigma(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2) = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}} \sum Z_1 \rho_{23}.$$

Pour reconnaître la signification géométrique de ces résultats, transportons les axes coordonnés parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque du plan $A_1 A_2 A_3$. En appelant α, β les coordonnées du foyer, il faut remplacer x_r et y_r par $x_r - \alpha$ et par $y_r - \beta$. On aura ainsi :

$$\begin{aligned}
\rho_{rs} &= (x_r - \alpha)(x_s - \alpha) + (y_r - \beta)(y_s - \beta) \\
&= \alpha^2 + \beta^2 - \alpha(x_r + x_s) - \beta(y_r + y_s) + x_r x_s + y_r y_s.
\end{aligned}$$

En considérant α, β comme des coordonnées courantes, l'équation $\rho_{rs} = 0$ représente évidemment un cercle, et comme elle est satisfaite par $\alpha = x_r$ ou x_s et $\beta = y_r$ ou y_s

et que le centre a pour coordonnées $\frac{x_r + x_s}{2}$, $\frac{y_r + y_s}{2}$, elle représente le cercle décrit sur le coté $A_r A_s$ comme diamètre. Donc, si l'on désigne par γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2 les puissances du foyer F par rapport aux circonférences décrites sur les cotés a_1, a_2, a_3 comme diamètres (ou les carrés des tangentes menées de F à ces circonférences), on aura

$$\rho_{12} = \gamma_3^2, \quad \rho_{23} = \gamma_1^2, \quad \rho_{31} = \gamma_2^2.$$

Les quantités Z_1, Z_2, Z_3 représentent (au signe près) les doubles des aires des triangles FA_2A_3, FA_3A_1, FA_1A_2; en appelant δ_1, δ_2, δ_3 les distances de F aux côtés a_1, a_2, a_3 du triangle, on aura

$$Z_1 = a_1\delta_1, \quad Z_2 = a_2\delta_2, \quad Z_3 = a_3\delta_3.$$

Remarquons aussi qu'en regardant α, β comme des coordonnées courantes, les équations $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$ représentent les côtés du triangle.

Comme Z_1, Z_2, Z_3 sont les mineurs du déterminant $(x_1 - \alpha, \ y_1 - \beta, \ z_1)$ par rapport aux éléments z, on peut écrire $\Sigma Z_1 \rho_{23} = (x_1 - \alpha, y_1 - \beta, \rho_{23})$. Remplaçons ρ_{rs} par $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha(x_r + x_s) - \beta(y_r + y_s) + x_r x_s + y_r y_s$; en ajoutant les deux premières colonnes multipliées par $-\alpha$ et β à la troisième, on aura

$$\Sigma Z_1 \rho_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - \alpha & y_1 - \beta & 2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\Sigma x_1 - \beta\Sigma y_1 + x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ 1 & x_2 - \alpha & y_2 - \beta & 2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\Sigma x_1 - \beta\Sigma y_1 + x_3 x_1 + y_3 y_1 \\ 1 & x_3 - \alpha & y_3 - \beta & 2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\Sigma x_1 - \beta\Sigma y_1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{vmatrix},$$

et si nous ajoutons aux trois dernières colonnes la première, multipliée successivement par

$$\alpha, \quad \beta, \quad -2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\Sigma x_1 + \beta\Sigma y_1,$$

il vient

$$\Sigma Z_1 \rho_{23} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & -2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\Sigma x_1+\beta\Sigma y_1 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_2x_3+y_2y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_3x_1+y_3y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_1x_2+y_1y_2 \end{vmatrix}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que $\Sigma Z_1 \rho_{23} = 0$ est l'équation d'un cercle, et comme le coefficient de $(\alpha^2+\beta^2)$ est $4S$, on peut poser $\Sigma Z_1 \rho_{23} = 4S\varepsilon^2$, ε^2 étant la puissance de F par rapport à ce cercle. On peut démontrer facilement que ce cercle est celui des neuf points du triangle. Car l'équation $\Sigma Z_1 \rho_{23} = 0$ est satisfaite en posant $Z_1 = 0$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{13} = 0$; les trois dernières représentent le côté a_1 et les circonférences décrites sur a_2 et a_3 comme diamètres, et ces trois lignes se coupent au pied d'une hauteur. Le déterminant

$$[x_1-\alpha,\ y_1-\beta,\ (x_2-\alpha)(x_3-\alpha)+(y_2-\beta)(y_3-\beta)] = \Sigma Z_1\rho_{23}$$

s'annule encore, comme acquérant deux lignes identiques, en posant

$$x_r-\alpha = -(x_s-\alpha), \quad y_r-\beta = -(y_s-\beta),$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{x_r+x_s}{2}, \quad \beta = \frac{y_r+y_s}{2}$$

(coordonnées du milieu de A_rA_s).

Les formules cherchées sont donc $\left(\text{à cause de } \dfrac{a_1a_2a_3}{4S} = R\right)$

$$p = 2R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}, \quad q = \frac{b^2}{a^2} = 4R\varepsilon^2\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2},$$

$$2a = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\varepsilon^2}, \quad b^2 = R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\varepsilon^2},$$

$$4a^2b^2 = R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2}{\varepsilon^6}.$$

La dernière relation donne le second des théorèmes de M. Faure, énoncés t. XX, p. 215.

En considérant α, β comme des coordonnées courantes, ou ε^2, γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2 comme des fonctions de circonférences, et δ_1, δ_2, δ_3 comme les fonctions des côtés du triangle, les équations ci-dessus donneront les lieux des foyers des coniques conjuguées au triangle $A_1 A_2 A_3$ et dans lesquelles le paramètre, le rapport des axes, l'un des axes ou le produit des axes sont constants.

Pour avoir les lieux des foyers des paraboles ou des hyperboles équilatères conjugués au triangle $A_1 A_2 A_3$, il suffit de faire $q = 0$ ou $q = -1$; on trouve, pour le premier lieu, $\varepsilon^2 = 0$ ou le cercle des neuf points, et pour le second $\gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + 4R\varepsilon^2\delta_1\delta_2\delta_3 = 0$ ou une courbe du sixième degré, admettant comme points doubles les sommets et les pieds des hauteurs et passant par les points circulaires à l'infini.

Il serait facile d'exprimer p et q en fonction des rayons focaux FA_1, FA_2, FA_3 et des angles que font ces rayons entre eux; il suffirait de remplacer x_r et y_r par $R_r \cos\omega_r$ et $R_r \sin\omega_r$. On trouve ainsi, par exemple,

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\operatorname{tang}(R_1 R_2)\operatorname{tang}(R_2 R_3)\operatorname{tang}(R_3 R_1)}{8S^2}\Sigma R_1^2 R_2^2 \sin 2(R_1 R_2).$$

Triangle circonscrit. — On a les trois équations de condition (*)

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \rho_{11} - t_1^2 & \rho_{12} - t_1 t_2 \\ \rho_{21} - t_2 t_1 & \rho_{22} - t_2^2 \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} \rho_{22} - t_2^2 & \rho_{23} - t_2 t_3 \\ \rho_{32} - t_3 t_2 & \rho_{33} - t_3^2 \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} \rho_{33} - t_3^2 & \rho_{31} - t_3 t_2 \\ \rho_{13} - t_1 t_3 & \rho_{11} - t_1^2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right.$$

(*) Pour trouver ces équations, on peut suivre la marche suivante, indiquée par M. Salmon dans son *Traité des sections coniques*. On conçoit

Pour trouver les valeurs de t_1, t_2, t_3. ou mieux celles de $\rho_{rs} - t_r t_s$, remarquons que les quantités ρ sont liées par l'équation identique

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

dont le premier membre est le carré de $(x_1 \ \ y_1 \ \ 0)$. Par conséquent, en désignant par ρ'_{rs} le mineur du déterminant (8) qui correspond à l'élément ρ_{rs}, les mineurs du réciproque

$$\begin{vmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} & \rho'_{13} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} & \rho'_{23} \\ \rho'_{31} & \rho'_{32} & \rho'_{33} \end{vmatrix}$$

sont aussi identiquement nuls (*), et on a

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \rho'_{22} & \rho'_{23} \\ \rho'_{32} & \rho'_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \rho'_{33} & \rho'_{31} \\ \rho'_{13} & \rho'_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme les déterminants (7) et (9) sont symétriques et de forme semblable, on est naturellement conduit à examiner s'il n'existe pas des facteurs μ_1, μ_2, μ_3 et de valeurs de t_1, t_2, t_3, tels qu'on ait identiquement

$$\rho_{11} - t_1^2 = \mu_1 \rho'_{11}, \quad \rho_{22} - t_2^2 = \mu_2 \rho'_{22}, \quad \rho_{33} - t_3^2 = \mu_3 \rho'_{23};$$

$$\rho_{12} - t_1 t_2 = \pm \sqrt{\mu_1 \mu_2}\, \rho'_{12},$$

$$\rho_{23} - t_2 t_3 = \pm \sqrt{\mu_2 \mu_3}\, \rho'_{23},$$

$$\rho_{31} - t_3 t_1 = \pm \sqrt{\mu_3 \mu_1}\, \rho'_{31}.$$

---

les coordonnées des points d'intersection de la courbe (1) par une droite telle que $A_1 A_2$, mises sous la forme $\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 z_1 + m_2 z_2}$, $\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 z_1 + m_2 z_2}$, et on exprime que l'équation

$$m_1^2(\rho_{11} - t_1^2) + 2 m_1 m_2 (\rho_{12} - t_1 t_2) + m_2^2(\rho_{22} - t_2^2) = 0,$$

qu'on obtient en écrivant que ces points sont sur la courbe, donne deux valeurs égales et de même signe pour le rapport $m_1 : m_2$.

(*) *Voir* Baltzer-Houël, page 51.

On trouve que cette identification est possible en posant (*)

$$\mu_1 = \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}}, \quad \mu_2 = \frac{\rho_{22}}{\rho_{33}\rho_{11}}, \quad \mu_3 = \frac{\rho_{33}}{\rho_{11}\rho_{22}},$$

et comme on a $\rho'_{rr} = Z_r^2$, on obtient enfin

$$\rho_{11} - t_1^2 = \frac{\rho_{11} Z_1^2}{\rho_{22}\rho_{33}}, \quad \rho_{22} - t_2^2 = \frac{\rho_{22} Z_2^2}{\rho_{33}\rho_{11}}, \quad \rho_{33} - t_3^2 = \frac{\rho_{33} Z_3^2}{\rho_{11}\rho_{22}},$$

$$\rho_{12} - t_1 t_2 = \pm\sqrt{(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)},$$

$$\rho_{23} - t_2 t_3 = \pm\sqrt{(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)},$$

$$\rho_{31} - t_3 t_1 = \pm\sqrt{(\rho_{33} - t_3^2)(\rho_{11} - t_1^2)}.$$

Quant aux doubles signes placés devant les radicaux, il faut prendre les trois radicaux avec le signe —, ou un seul avec ce signe, suivant que les trois contacts du triangle avec la conique ont lieu sur les côtés mêmes ou qu'un seul contact est intérieur et les deux autres extérieurs (**).

Portons maintenant ces valeurs dans les équations (5) et (6). Pour pouvoir développer plus facilement les déterminants, nous diviserons les lignes et les colonnes respectivement par

$$\sqrt{\rho_{11} - t_1^2}, \quad \sqrt{\rho_{22} - t_2^2}, \quad \sqrt{\rho_{33} - t_3^2}.$$

(*) On écrit, par exemple,

$$\rho'_{11} = \rho_{22}\rho_{33} - \rho_{23}^2 = \frac{\rho_{22}\rho_{33}}{\rho_{11}}\left(\rho_{11} - \frac{\rho_{23}^2\rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}}\right),$$

d'où

$$t_1^2 = \frac{\rho_{23}^2\rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}} \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}}.$$

(**) Car, suivant que le point de contact est situé entre A_1 et A_2, ou se trouve sur le prolongement de $A_1 A_2$, le rapport $m_1 : m_2$ (*voir* l'une des notes précédentes) doit être positif ou négatif, et par suite le terme du milieu de l'équation $m_1^2(\rho_{11} - t_1^2) + \ldots = 0$ est négatif ou positif. Quand il n'y a qu'un seul contact intérieur du triangle, nous le supposerons sur le côté a_3.

Nous aurons

$$-4S^2p^2 = (\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \mp 1 \\ -1 & 1 & \mp 1 \\ \mp 1 & \mp 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4\frac{Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2}{\rho_{11}\rho_{22}\rho_{33}},$$

ou

$$p = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{SR_1 R_2 R_3} = 4R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R_1 R_2 R_3},$$

et

$$4S^2q = -(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\rho_{11} - t_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{\rho_{22} - t_2^2}} & \frac{1}{\sqrt{\rho_{33} - t_3^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\rho_{11} - t_1^2}} & 1 & -1 & \mp 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\rho_{22} - t_2^2}} & -1 & 1 & \mp 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\rho_{33} - t_3^2}} & \mp 1 & \mp 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\sqrt{(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)}\,\Sigma\sqrt{\rho_{11} - t_1^2},$$

ou

$$q = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{SR_1^2 R_2^2 R_3^2}\Sigma Z\rho_{11}.$$

Pour avoir la signification géométrique de la quantité $\Sigma Z_1\rho_{11}$, suposons encore l'origine des axes coordonnés en un point quelconque. Il vient

$$\Sigma Z_1\rho_{11} = (x_1 - \alpha \quad y_1 - \beta \quad x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + \alpha^2 + \beta^2),$$

ou, en ajoutant à la troisième colonne les deux premières multipliées par 2α et par 2β,

$$\Sigma Z_1\rho_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - \alpha & y_1 - \beta & x_1^2 + y_1^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \\ 1 & x_2 - \alpha & y_2 - \beta & x_2^2 + y_2^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \\ 1 & x_3 - \alpha & y_3 - \beta & x_3^2 + y_3^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix}$$

et en ajoutant aux trois dernières colonnes la première multipliée par α, par β et par $(\alpha^2+\beta^2)$

$$\Sigma Z_1\rho_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}.$$

On voit immédiatement que l'équation $\Sigma Z_1\rho_{11} = 0$ est l'équation d'un cercle et comme le déterminant devient nul par les hypothèses $\alpha = x_r$, $\beta = y_r$, ce cercle passe par les sommets du triangle. Donc, en désignant par η^2 la puissance du foyer F par rapport à la circonférence circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$, et en remarquant que le coefficient de $(\alpha^2+\beta^2)$ est $-2S$, on aura

$$\Sigma Z_1\rho_{11} = -2S\eta^2.$$

Les formules relatives aux axes sont donc

$$p = 4R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R_1R_2R_3}, \qquad q = -8R\eta^2\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R_1^2R_2^2R_3^2},$$

$$2a = \frac{R_1R_2R_3}{\eta^2}, \qquad b^2 = -2R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\eta^2},$$

$$4a^2b^2 = -2R\frac{R_1^2R_2^2R_3^2\delta_1\delta_2\delta_3}{\eta^6}.$$

La dernière formule donne le premier des théorèmes énoncés, par M. Faure, dans les *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 215.

Des relations que nous venons de trouver, on peut aussi conclure les lieux des foyers des coniques inscrites à un triangle fixe et dans lesquelles le paramètre, le rapport des axes, l'un des axes ou le produit des axes sont constants. En faisant $q = 0$ ou $q = -1$, on aura les lieux des foyers des paraboles ou des hyperboles équilatères

inscrites au triangle $A_1 A_2 A_3$; le premier lieu est la circonférence circonscrite, et le second une courbe du sixième ordre, passant par les points circulaires à l'infini et par les sommets du triangle.

APPLICATION DU CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES A LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR ÉMILE FRANÇOISE,

Professeur au lycée de Toulon.

I.

Construire un polygone, connaissant les sommets des triangles semblables à un triangle donné construits sur ses côtés.

Soient A', B', C',..., H' les points donnés; A, B, C,..., H les sommets du polygone que l'on se propose de construire. Connaissant la forme du triangle AA'B, BB'C,..., on connaît les rapports égaux

$$(1)\qquad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'B}} = \ldots = \frac{\overline{H'A}}{\overline{H'H}} = ni^{\alpha}.$$

La considération des triangles A'BB', B'CC',..., H'AA' nous donne la série des équipollences

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} ni^{\alpha}\,\overline{A'A} - \overline{B'B} & & & = \overline{A'B'}, \\ & ni^{\alpha}\,\overline{B'B} - \overline{C'C} & & = \overline{B'C'}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\overline{A'A} & & +\, ni^{\alpha}\,\overline{H'H} & = \overline{H'A'}. \end{array}\right.$$

En résolvant ce système d'équipollences comme un sys-

tème d'équations du premier degré, on obtient

$$\begin{vmatrix} ni^{\alpha} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ni^{\alpha} & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & ni^{\alpha} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & ni^{\alpha} \end{vmatrix} \overline{A'A} = \begin{vmatrix} \overline{A'B'} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{B'C'} & ni^{\alpha} & -1 & \dots & 0 \\ \overline{C'D'} & 0 & ni^{\alpha} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{H'A} & 0 & 0 & \dots & ni^{\alpha} \end{vmatrix}$$

ou bien, k désignant le nombre des côtés du polygone cherché,

$$(3) \quad \overline{A'A} \frac{n^{k-1}i^{(k-1)\alpha}\overline{A'B'} + n^{k-2}i^{(k-2)\alpha}\overline{B'C'} + \dots + H'A'}{n^k i^{k\alpha} - 1},$$

construction géométrique. Soient (*)

$$\overline{OM} = 1 \quad \text{et} \quad \overline{ON} = ni^{\alpha}.$$

Le triangle NOM est semblable au triangle BA'A. Sur la direction de OM je prends

$$\text{gr}.OM' = \text{gr}.ON,$$

et par le point M' je mène M'N' parallèle à MN. Je construis une droite faisant avec OM un angle double de $\widehat{NOM}$, et je décris du point O comme centre, avec gr.ON' comme rayon, un arc de cercle qui coupe en N_1 le côté de cet angle

$$\overline{ON_1} = n^2 i^{2\alpha};$$

je construis de la même manière la droite

$$\overline{ON_2} = n^3 i^{3\alpha},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\overline{ON_{k-2}} = n^{k-1} i^{(k-1)\alpha},$$

$$\overline{ON_{k-1}} = n^k i^{k\alpha},$$

D'ailleurs

$$\overline{MN_{k-1}} = n^k i^{k\alpha} - 1.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Cela posé, sur $A'B'$, considéré comme côté homologue de $\overline{OM}$, je construis un triangle semblable au triangle OMN_{k-2}, sur $\overline{B'C'}$ un triangle $B'C'B_1$ semblable à OMN_{k-3}, ...

La somme

$$\overline{PQ} = \overline{A'A_1} + \overline{B'B_1} + \ldots + \overline{H'A'}$$

représente le numérateur de l'expression de $A'A$.

L'équipollence

$$\frac{\overline{A'A}}{1} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MN_{k-1}}}$$

montre que $\overline{A'A}$ est une quatrième proportionnelle aux trois lignes $\overline{OM}$ ou 1, et $\overline{MN_{k-1}}$.

Le point A une fois déterminé, on achève sans difficulté la construction du polygone.

II.

Discussion. — *Lorsque n est différent de l'unité, c'est-à-dire lorsque les triangles* $AA'B$, $BB'C$,... *ne sont pas des triangles isoscèles ayant pour bases les côtés du polygone* ABCD... H, *le dénominateur de l'expression* (3) *est différent de zéro. Quel que soit le polygone* $A'B'C'$...H, *le problème est possible et n'admet qu'une solution.*

Je suppose maintenant $n = 1$.

Dans cette hypothèse, le dénominateur du second membre de l'équipollence (3) devient

$$(i^{k\alpha} - 1) = (i^\alpha - 1)\left(i^\alpha - e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)\left(i^\alpha - e^{\frac{4\pi i}{k}}\right)\ldots\left(i^\alpha - e^{\frac{2(k-1)\pi i}{k}}\right),$$

ou

$$(i^{k\alpha} - 1) = \left(e^{\frac{\pi\alpha i}{2}} - 1\right)\left(e^{\frac{\pi\alpha i}{2}} - e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)\ldots\left(e^{\frac{\pi\alpha i}{2}} - e^{\frac{2(k-1)\pi i}{k}}\right).$$

Le numérateur

$$i^{(k-1)\alpha}\,\overline{A'B'} + i^{(k-2)\alpha}\,\overline{B'C'} + \ldots + \overline{H'A'}$$

peut, à cause de la relation

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \ldots + \overline{H'A'} = 0,$$

être mis sous la forme

$$\overline{A'B'}\,(i^{(k-1)\alpha} - 1) + B'C'\,(i^{(k-2)\alpha n} - 1) + \ldots = 0.$$

Il est divisible par $i^{\alpha} - 1$.

Pour $\alpha = 0$, *c'est-à-dire quand l'angle au sommet des triangles semblables* A A'B, B B'C, . . . , *ou, ce qui revient au même, l'angle* NOM *est nul, le problème est déterminé.*

L'équipollence

$$A'A = A'B$$

montre *que le polygone* ABCD. . . H *se réduit à un point.*

Lorsque α prend l'une des valeurs

$$(4)\qquad \frac{4}{k},\quad \frac{8}{k},\quad \frac{12}{k},\ldots,\ \begin{cases} \dfrac{4}{k}\,\dfrac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ est impair,}\\ \text{ou} & \\ \dfrac{4}{k}\,\dfrac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair,}\end{cases}$$

c'est-à-dire *lorsque l'angle au sommet des triangles isoscèles est un multiple de l'angle au centre, l'expression de* A'B' *est nulle. Le problème est en général impossible.*

Toutefois, si l'équipollence

$$(5)\qquad i^{(k-1)\alpha}\,\overline{A'B'} + i^{(k-2)\alpha}\,\overline{B'C'} + \ldots + H'A' = 0$$

est satisfaite par l'une des valeurs de α comprise dans la suite (4), *le problème est indéterminé pour cette valeur de α.*

Lorsque k est un nombre pair, la dernière des valeurs (4) de α est égale à $\frac{4}{k}\,\frac{k}{2} = 2$. La valeur correspondante de l'angle AA'B est de deux droits. En d'autres termes, le point A' est le milieu du côté AB. Il résulte de là que les sommets d'un polygone A'B'C'...H' d'un nombre pair de côtés ne sont pas en général les milieux des côtés d'un autre polygone ABC...H d'un même nombre de côtés.

Pour que ce second polygone existe, il faut que les côtés du premier satisfassent à l'équipollence

$$(6)\qquad \overline{A'B'} - \overline{B'C'} + \overline{C'D'} - \ldots - \overline{H'A'} = 0.$$

Le polygone ABC... est alors indéterminé.

En combinant l'équipollence (6) avec la suivante

$$(7)\qquad \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \ldots + \overline{H'A'} = 0,$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{A'B'} + \overline{C'D'} + \ldots = 0,\\ \overline{B'C'} + \overline{D'E'} + \ldots = 0.\end{array}\right.$$

Ces deux dernières équipollences expriment *que les côtés de rang impair du polygone* A'B'C'...H' *sont équipollents aux côtés d'un polygone formé de $\frac{k}{2}$ côtés, et qu'il en est de même des côtés de rang pair.*

Si les points A', B', C', D' sont au nombre de quatre seulement, les équipollences (8) se réduisent aux deux suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l}\overline{A'B'} + \overline{C'D'} = 0,\\ \overline{B'C'} + \overline{D'A'} = 0.\end{array}\right.$$

Ces deux équipollences expriment que le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme : ce qui est connu.

III.

Du triangle. — L'angle au centre du triangle est égal à 120 degrés.

D'après l'analyse précédente, si l'on construit sur les côtés d'un triangle quelconque ABC des triangles isoscèles semblables, AA'B, BB'C, CC'A ayant leur angle au sommet égal à 120 degrés, il existe entre les positions des points A', B', C' une relation que je vais déterminer.

Dans ce cas particulier, l'équipollence (5) se réduit à

$$i^{\frac{8}{3}}\,\overline{A'B'} + i^{\frac{4}{3}}\,\overline{B'C'} + \overline{C'A'} = 0$$

Or,

$$i^{\frac{4}{3}} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$i^{\frac{8}{3}} = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En substituant dans l'équipollence précédente, on obtient

$$(10)\qquad -\left(\overline{A'B'} + \overline{B'C'}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\overline{A'B'} - \overline{B'C'}\right) + \overline{C'A'} = 0,$$

ou bien, en tenant compte de l'équipollence

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'} = 0,$$

$$-\frac{3}{2}\,C'A' + \frac{i\sqrt{3}}{2}\,(A'B' - B'C') = 0,$$

ou enfin

$$(11)\qquad \frac{B'C' - A'B'}{C'A'} = i\sqrt{3}.$$

Pour interpréter cette dernière équipollence, je prolonge la droite $\overline{A'B'}$ d'une longueur B′D′ égale à elle-même. Je joins $\overline{DC'}$:

$$\overline{DC'} \simeq \overline{B'C'} + \overline{DB'} \simeq \overline{B'C'} - \overline{A'B'}.$$

L'équipollence (11) exprime que les deux droites $\overline{A'C'}$ et $\overline{DC'}$ sont perpendiculaires entre elles, et, en outre, que

$$\frac{\text{gr.}\,C'D}{\text{gr.}\,A'B'} = \sqrt{3}.$$

L'angle A′ du triangle rectangle A′C′D est égal à 60 degrés; et comme le point B′ est le milieu de l'hypoténuse, le triangle A′B′C′ est équilatéral. Donc :

Si sur les trois côtés d'un triangle quelconque ABC *on construit trois triangles isoscèles semblables* AA′B, BB′C, CC′A *tous les trois extérieurs ou tous les trois intérieurs au triangle* ABC, *et ayant leurs angles au sommet égaux à* 120 *degrés, le triangle* A′B′C′ *est équilatéral.*

Réciproquement, *soient un triangle équilatéral* A′B′C′ *et un point quelconque* A. *On joint* AA′, *et sur cette ligne comme côté on construit un triangle isoscèle* AA′B *dont l'angle en* A′ *est de* 120 *degrés. Sur* BB′ *on construit un triangle semblable* BB′C. *On joint* AC; *le triangle* CC′A *est un triangle isoscèle dont l'angle en* C′ *est égal à* 120 *degrés.*

Du quadrilatère. — L'angle au centre du carré est égal à 90 degrés.

Il y a impossibilité ou indétermination lorsque les points A′, B′, C′, D′ sont les sommets de triangles isoscèles rectangles, ou bien les milieux des côtés du quadrilatère ABCD.

Dans ce dernier cas, si le quadrilatère A′B′C′D′ est

un parallélogramme, le quadrilatère ABCD est indéterminé.

Lorsque les points A', B', C', D' sont les sommets de triangles isoscèles, les quatre côtés du quadralatère A'B'C'D' doivent, pour que le quadrilatère ABCD existe, satisfaire à l'équipollence (5), qui se réduit à

$$-i\overline{A'B'} - \overline{B'C'} + i\overline{C'D'} + \overline{D'A'} = 0,$$

ou

$$(12)\qquad \overline{A'B'} - \overline{C'D'} = i(\overline{B'C'} - \overline{D'A'}).$$

Cette dernière équipollence exprime que *la différence entre deux côtés opposés du quadrilatère* A'B'C'D' *est égale en valeur absolue et perpendiculaire à la différence des deux autres.*

SUR UN THÉORÈME DE M. FERRERS;

PAR M. PAUL SERRET.

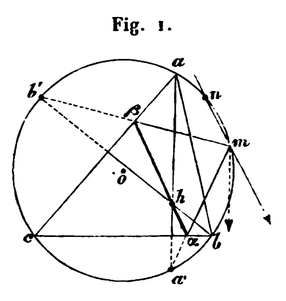
I.

1. L'enveloppe de la droite qui réunit les projections, sur les trois côtés d'un triangle, d'un point quelconque du cercle circonscrit, a été étudiée déjà par plusieurs géomètres. M. Ferrers, le premier, en a reconnu la nature, en établissant que cette enveloppe n'est autre qu'une *hypocycloïde de module* $\frac{1}{3}$: résultat remarquable qui paraît avoir échappé à la curiosité de Steiner, et que l'on peut établir géométriquement comme il suit.

Soient (*fig.* 1) a, b, c et h les trois sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un triangle quelconque; a', b', c' les symétriques du point h par rapport aux trois côtés du triangle; on sait que les points a', b', c' appar-

tiennent au cercle circonscrit. Or il résulte presque immédiatement de là que, si l'on imagine un rayon de lumière issu du point h, et se propageant de part et d'autre de ce point de manière à se réfléchir simultanément sur deux des côtés du triangle : 1° les rayons réfléchis se couperont toujours en quelque point m du cercle circonscrit au triangle; 2° la parallèle au rayon incident menée par ce point m sera parallèle à la droite qui contient les projections de ce même point sur les trois côtés du triangle, et les distances de ces droites au point fixe h seront entre elles dans le rapport de 2 à 1. Les enveloppes de ces droites sont donc homothétiques, et le problème se réduit à trouver l'enveloppe de la seule droite mn. Or, le rayon $h\alpha$ et le rayon réfléchi αm (lequel, prolongé, passe par le point fixe a') étant également inclinés sur la hauteur aa', considérée comme verticale, la parallèle mn au rayon incident et la corde $a'm$ seront dirigées symétriquement par rapport à la verticale du point m.

Fig. 1.



Par le point a' du cercle donné $aba'c$, on mènera donc une corde quelconque $a'm$; menant ensuite, par l'extrémité mobile m de cette corde, une droite indéfinie mn symétrique de la précédente ma' par rapport à la verticale du point m, il restera à étudier l'enveloppe de la droite mn qui résulte de cette construction.

2. Cette première transformation du problème met d'ailleurs en évidence l'une des propriétés les plus remarquables de l'enveloppe dont il s'agit, laquelle, étant formée à l'aide d'un triangle scalène quelconque, est cependant régulière et composée de trois branches identiques distribuées symétriquement, autour du centre, dans des espaces angulaires de 120 degrés.

Effectivement, la série des droites mn est *une* pour tous les triangles inscrits abc, ab_1c_1,... qui auraient l'un de leurs sommets au point a et l'une de leurs hauteurs dans la droite indéfinie aha'. Et comme l'un de ces triangles est isoscèle, on voit d'abord que l'enveloppe relative à un triangle scalène quelconque abc est identique à l'enveloppe relative à un certain triangle isoscèle ab_1c_1 $(ac_1 = b_1c_1)$. On peut donc supposer isoscèle le triangle initial abc et poser (en changeant la notation) $ab = ac$. Mais alors l'un des triangles inscrits, de même sommet a et de même hauteur aha' que le précédent, sera équilatéral. Et l'enveloppe relative au triangle scalène que nous considérions d'abord, se trouvant identique à l'enveloppe relative à ce triangle équilatéral, sera *régulière* comme l'est évidemment celle-ci.

3. Mais on peut négliger cette observation et passer directement à l'étude de l'enveloppe des droites mn, en observant que l'angle de deux quelconques de ces droites mn, $m'n'$, étant égal à celui des cordes symétriques correspondantes $a'm$, $a'm'$, cet angle sera mesuré, comme celui-ci, par la moitié de l'arc mm'. On a donc, en désignant par n, n' les deux dernières traces de ces droites sur le cercle donné $aba'c$,

$$\pm \frac{1}{2}\,\widehat{nn'} \pm \frac{1}{2}\,\widehat{mm'} = \frac{1}{2}\,\widehat{mm'},$$

ou seulement, et parce que toutes les autres combinaisons de signes s'excluent d'elles-mêmes,

$$\frac{1}{2}\,\widehat{nn'} - \frac{1}{2}\,\widehat{mm'} = \frac{1}{2}\,\widehat{mm'},$$

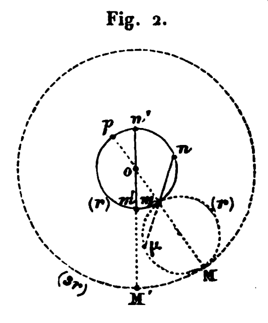
c'est-à-dire

$$(1) \qquad \widehat{mm'} = \frac{1}{2}\,\widehat{nn'}.$$

Deux quelconques des droites considérées se coupent donc toujours à l'extérieur du cercle initial *abc*, et les arcs qu'elles interceptent sur ce cercle sont toujours dans le rapport de 1 à 2.

4. Soit donc μ le point de concours de deux de ces

Fig. 2.



droites. Les triangles semblables $\mu mm'$, $\mu n'n$ fournissant la proportion

$$(2) \qquad \frac{\mu m}{\mu n'} = \frac{\text{corde } mm'}{\text{corde } nn'},$$

on a, en supposant les deux droites infiniment voisines l'une de l'autre, et passant à la limite (*fig.* 2),

$$(1, 2) \qquad \frac{\mu m}{\mu n} = \frac{\text{arc } mm'}{\text{arc } nn'} = \frac{1}{2},$$

ou

$$\overline{nm} = \overline{m\mu}.$$

Le point μ, suivant lequel la droite mobile mn touche son enveloppe, coïncide donc avec la deuxième trace de cette droite sur un cercle $m\mu$M qui toucherait en m le cercle initial et serait décrit avec le même rayon. Et il ne reste plus qu'à trouver le lieu de tous les points analogues μ.

Or si l'on désigne par $m'n'$ celle des droites mobiles qui passe par le centre o du cercle initial, et que l'on prolonge les rayons om, om' respectivement en M, M′ jusqu'au cercle décrit, du point o comme centre, avec un rayon triple; la figure résultante fournit immédiatement ces égalités :

$$\widehat{M\mu} = \widehat{np} = \widehat{nn'} + \widehat{n'p} = \widehat{nn'} + \widehat{mm'};$$

de là, en utilisant la relation antérieure $\widehat{nn'} = 2\widehat{mm'}$,

$$\widehat{M\mu} = 2\widehat{mm'} + \widehat{mm'} = 3\widehat{mm'},$$

ou enfin

$$\widehat{M\mu} = \widehat{MM'}.$$

Or le point M′ est fixe, et l'enveloppe considérée n'est autre que l'*hypocycloïde engendrée par le point* μ *du cercle* Mμm *qui roulerait intérieurement sur le cercle* (o, MM′) *de rayon triple* (Ferrers).

II.

5. L'enveloppe précédente, ou du moins la courbe homothétique que nous considérions d'abord, n'est autre au fond, comme l'on sait, que l'enveloppe de la *tangente au sommet* des paraboles inscrites au triangle initial abc,

ou $A.B.C = o$. Soit donc $X = o$ l'une de ces tangentes, et $Y = o$ l'un des diamètres de la parabole correspondante. L'équation symbolique $c = o$ désignant la *droite à l'infini*, on aura, dans le groupe

$$A^2,\ B^2,\ C^2;\quad X^2,\ cY,\ c^2$$

six couples de droites conjuguées à cette parabole, et l'on conclura de l'identité résultante (*Géométrie de direction*, p. 160).

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 + \dot{X}^2 + cY + c^2 \equiv o,$$

que les deux courbes

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 = o, \quad X^2 + cY + c^2 = o$$

se confondent en une seule : une parabole conjuguée au triangle initial et dont l'*axe* $X = o$ coïncide avec la *tangente au sommet* de la parabole précédente. *L'enveloppe précédente est donc identique à l'enveloppe de l'axe des paraboles conjuguées au triangle initial* ou *inscrites au triangle parallèle que l'on peut circonscrire à celui-là.*

6. Soient $X = o$ l'*axe* de l'une de ces dernières paraboles, et $Y.Y' = o$ deux perpendiculaires quelconques à l'axe X. La courbe que l'on considère étant conjuguée aux six couples de droites

$$A.B,\ B.C,\ A.C;\quad X.Y,\ X.Y' \ \text{et}\ \ c^2,$$

l'identité résultante

$$AB + BC + AC + XY + XY' + c^2 \equiv o,$$

et l'orthogonalité des directions X et Y, X et Y' montrent encore que les deux courbes

$$AB + BC + AC = o, \quad \text{et} \quad X(Y + Y') + c^2 = o$$

se confondent suivant une *hyperbole équilatère* circon-

scrite au triangle initial ABC, et dont l'*une des asymptotes* $X = o$ se confond avec l'*axe* de la parabole antérieure. *L'enveloppe précédente représente donc aussi la courbe enveloppée par chacune des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites au triangle initial.*

L'étude directe de cette dernière courbe serait d'ailleurs bien aisée. Car si l'on prend pour centre de l'une des hyperboles de la série un point quelconque m du cercle des neuf points du triangle abc, et que, joignant ce point m au point milieu a'' du côté bc, on rabatte la corde $a''m$ sur ce côté de part et d'autre de a'', en $a''\mu$ et $a''\nu$, les droites $m\mu$, $m\nu$ seraient les deux asymptotes de l'hyperbole considérée. Les *asymptotes* et aussi, dès lors, les *axes principaux* de toutes ces hyperboles se déterminent donc, en réalité, par une construction identique à celle qui nous avait fourni les droites mn du paragraphe précédent.

7. Enfin, si l'on désigne par $X = o$ l'*axe* de l'une des *paraboles inscrites au triangle* ABC, par $Y.Y' = o$ deux perpendiculaires quelconques à cet axe, le dédoublement de l'identité

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 + XY + XY' + c^2 = o,$$

suivant les équations équivalentes

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 = o, \quad X(Y + Y') + c^2 = o,$$

entraîne encore la conclusion que l'*axe des paraboles inscrites et l'une des asymptotes des hyperboles équilatères conjuguées à un même triangle* ont la même enveloppe : une hypocycloïde, etc.

8. En résumé, la tangente au sommet et l'axe des paraboles inscrites, chacun des axes principaux et chacune

des asymptotes des hyperboles équilatères conjuguées 2 à 2 circonscrites à un triangle, roulent sur autant d'hypocycloïdes de module $\frac{1}{3}$.

III.

9. L'étude analytique du problème I, qui a donné lieu déjà à de très-savantes recherches, peut aussi fournir un nouvel exemple des avantages que comporte en Géométrie, comme j'ai essayé ailleurs de le montrer, la considération des formes linéaires dérivées de certaines formes quadratiques.

Soient, en désignant par a_1, b_1; a_2, b_2; ... les cosinus et sinus habituels,

$$(a_1x + b_1y - p_1)(a_2x + b_2y - p_2)(a_3x + b_3y - p_3) = 0$$

le trois côtés d'un triangle, et

$$(0) \qquad ax + by - p = 0$$

la droite qui réunit les projections, sur ces côtés, d'un point quelconque du cercle circonscrit, ou la *tangente au sommet de l'une des paraboles inscrites.*

Si l'on exprime que la forme homogène

$$\lambda(ax+by-p)^2+\lambda_1(a_1x+b_1y-p_1)^2+\ldots+\lambda_3(a_3x+b_3y+p_3)^2$$

s'abaisse au premier degré, en posant

$$(1) \qquad \lambda a^2 + \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \lambda b^2 + \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + \lambda_3 b_3^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \lambda ab + \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \lambda_3 a_3 b_3 = 0:$$

on sait que l'équation résultante

$$(0') \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda ap + \lambda_1 a_1 p_1 + \ldots)x + (\lambda bp + \lambda_1 b_1 p_1 + \ldots)y \\ \qquad - \frac{1}{2}(\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \ldots) = 0 \end{array} \right.$$

représente la médiane du quadrilatère $PP_1P_2P_3$, ou l'un des diamètres de la parabole inscrite. Et, comme ce diamètre et la tangente au sommet (o) doivent se couper à angle droit, l'on a aussi

$$(\lambda ap + \lambda_1 a_1 p_1 + \ldots)a + (\lambda bp + \lambda_1 b_1 p_1 + \ldots)b = 0;$$

ou

$$(4)\quad \lambda p + \lambda_1 p_1(aa_1 + bb_1) + \lambda_2 p_2(aa_2 + bb_2) + \lambda_3 p_3(aa_3 + bb_3) = 0.$$

De là, par l'élimination des paramètres entre les équations (1), (2), (3), (4),

$$\begin{vmatrix} p & p_1(aa_1+bb_1) & p_2(aa_2+bb_2) & p_3(aa_3+bb_3) \\ a^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ b^2 & b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ ab & a_1 b_1 & a_2 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en mettant, au lieu de a, b; a_1, b_1; ..., les cosinus correspondants et remplaçant la seconde ligne et la troisième par la somme et la différence de ces lignes,

$$(1)\quad \begin{vmatrix} p & p_1\cos(\alpha-\alpha_1) & p_2\cos(\alpha-\alpha_2) & p_3\cos(\alpha-\alpha_3) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos 2\alpha & \cos 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_2 & \cos 2\alpha_3 \\ \sin 2\alpha & \sin 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_2 & \sin 2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui définit l'enveloppe de la droite mobile

$$(o)\qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Or, si l'on ordonne l'équation (1) par rapport aux éléments de la première ligne, de cette manière :

$$(1')\qquad k.p + k_1.p_1 + k_2.p_2 + k_3.p_3 = 0,$$

l'on a

$$k = -[\sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha_1)],$$
$$k_1 = \cos(\alpha - \alpha_1)[\sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha) + \sin 2(\alpha - \alpha_2)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

et si, laissant de côté le premier coefficient, qui est numérique, on développe le second, on trouve successivement

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos(\alpha - \alpha_1)[2\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\ &\qquad + 2\sin(\alpha_3 - \alpha_2)\cos(2\alpha - \alpha_2 - \alpha_3)] \\ &= \sin(\alpha_2 - \alpha_3)[2\cos(\alpha - \alpha_1)\cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\ &\qquad - 2\cos(\alpha - \alpha_1)\cos(2\alpha - \alpha_2 - \alpha_3)] \\ &= \sin(\alpha_2 - \alpha_3)[\cos(\alpha - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \cos(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) \\ &\qquad - \cos(\alpha + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) - \cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)], \end{aligned}$$

expression que l'on peut écrire

$$k_1 = l_1 \cos\alpha + m_1 \sin\alpha - n_1 \cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3).$$

Les trois coefficients k_1, k_2, k_3 sont d'ailleurs de la même forme, et, leurs valeurs actuelles étant portées dans l'équation (1'), elle dévient

$$(1'') \quad p = l\cos\alpha + m\sin\alpha - n\cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3).$$

La distance $p' = l\cos\alpha + m\sin\alpha - p$ de la droite mobile au point *déterminé* ($x = l$, $y = m$) peut donc s'exprimer par la relation équivalente

$$(1''') \qquad p' = n\cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = n\cos 3\alpha'.$$

Or cette formule revient identiquement à celle de M. Ferrers, et la nature de l'enveloppe y est en évidence.

IV.

10. La surface enveloppe du *plan tangent au sommet des paraboloïdes inscrits à l'hexaèdre*

$$P_1 \ldots P_6 \equiv (a_1 x + b_1 y + c_1 z - p_1) \ldots (a_6 x + b_6 y + c_6 z - p_6) = 0$$

est aussi de la troisième classe; et son équation, dont l'interprétation géométrique présente d'ailleurs de plus grandes difficultés, peut s'obtenir par une méthode toute semblable.

Soit, en effet,

$$(\text{o}) \qquad P \equiv ax + by + cz - p = 0$$

le plan mobile considéré dans l'une quelconque de ses positions. Si l'on exprime que la forme homogène

$$\lambda(ax + by + cz - p)^2 + \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z - p_1)^2 + \ldots + \lambda_6(a_6x + b_6y + c_6z - p_6)^2$$

s'abaisse au premier degré en posant

$$(1) \qquad \lambda a^2 + \lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_6 a_6^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \lambda b^2 + \lambda_1 b_1^2 + \ldots + \lambda_6 b_6^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \lambda c^2 + \lambda_1 c_1^2 + \ldots + \lambda_6 c_6^2 = 0;$$

$$(4) \qquad \lambda ab + \lambda_1 a_1 b_1 + \ldots + \lambda_6 a_6 b_6 = 0,$$

$$(5) \qquad \lambda bc + \lambda_1 b_1 c_1 + \ldots + \lambda_6 b_6 c_6 = 0,$$

$$(6) \qquad \lambda ac + \lambda_1 a_1 c_1 + \ldots + \lambda_6 a_6 c_6 = 0,$$

on sait que l'équation résultante (*Géométrie de Direction*, p. 86)

$$(\text{o}') \left\{ \begin{array}{l} (\lambda ap + \lambda_1 a_1 p_1 + \ldots)x + (\lambda bp + \lambda_1 b_1 p_1 + \ldots)y \\ \quad + (\lambda cp + \lambda_1 c_1 p_1 + \ldots)z - \frac{1}{2}(\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \ldots) = 0 \end{array} \right.$$

représente le *plan du centre* des surfaces du second ordre inscrites à l'heptaèdre $PP_1 \ldots P_6$, ou l'ensemble des directions diamétrales de tous les paraboloïdes inscrits. Le plan des centres (o') et le plan mobile (o) se coupent donc orthogonalement; l'on a encore

$$(7) \quad \lambda p + \lambda_1 p_1(aa_1 + bb_1 + cc_1) + \ldots + \lambda_6 p_6(aa_6 + bb_6 + cc_6) = 0,$$

6.

et l'enveloppe cherchée se trouve définie par l'équation

$$\begin{vmatrix} p & p_1(aa_1+bb_1+cc_1) & \ldots & p_6(aa_6+bb_6+cc_6) \\ a^2 & a_1^2 & \ldots & a_6^2 \\ b^2 & b_1^2 & \ldots & b_6^2 \\ c^2 & c_1^2 & \ldots & c_6^2 \\ ab & a_1b_1 & \ldots & a_6b_6 \\ bc & b_1c_1 & \ldots & b_6c_6 \\ ac & a_1c_1 & \ldots & a_6c_6 \end{vmatrix} = 0,$$

ou par la suivante :

$$p\sin(1,2,\ldots,6) - p_1\cos(p_1,p)\sin(2,3,\ldots,6,0) + \ldots$$
$$+ p_6\cos(p_6,p)\sin(0,1,2,\ldots,5) = 0,$$

dans laquelle $\sin(1,2,\ldots,6)$ désigne un certain facteur goniométrique dépendant de l'angle solide hexaèdre qui résulte des normales menées d'une même origine à six des plans considérés. Il resterait à reconnaître ce facteur et à définir géométriquement la surface enveloppe, qui se réduit à un cylindre dans un cas particulier; et dont la forme, dans le cas général, est peut-être indépendante de celle de l'hexaèdre donné.

LETTRE A M. BOURGET SUR UN ARTICLE DES NOUVELLES ANNALES;

Par M. DE SAINT-GERMAIN,

Agrégé, Docteur ès Sciences, Répétiteur à Sainte-Barbe.

Sur les combinaisons complètes.

Dans le numéro des *Annales* du mois d'avril 1869, vous avez inséré une Note de M. Melon, montrant que le nom-

bre des combinaisons complètes, ou avec répétition, de m lettres n à n est égal à celui des combinaisons ordinaires de $m+n-1$ lettres n à n. Sa démonstration est trop longue pour entrer dans l'enseignement, mais je crois que son idée peut être réalisée en quelques mots, comme il suit.

Soient m lettres françaises, a, b, c, ..., l et $n-1$ lettres grecques, α, β, γ, ..., ζ, η : je forme leurs combinaisons n à n, et je dis qu'à l'aide d'une convention simple elles représenteront, sans omission ni double emploi, les combinaisons complètes des m lettres françaises. Prenons une combinaison formée de p lettres françaises et de $n-p$ lettres grecques, que je suppose rangées dans l'ordre de leurs alphabets respectifs ; il y a $p-1$ des lettres grecques données absentes de cette combinaison. Cela posé, je remplace les lettres grecques jusqu'à la première absente par la première lettre française, celles qui sont comprises entre la première et la deuxième absente, par la deuxième lettre française, et ainsi de suite, une des séries de lettres grecques pouvant disparaître, s'il manque deux lettres consécutives; par exemple, $bdfg\alpha\beta\delta\eta$ représenterait $b^2d^2fg^2$. Il est clair que les combinaisons ainsi formées différeront les unes des autres, soit par la nature de leurs lettres, soit par le nombre de fois que ces lettres y sont écrites, et ainsi que toute combinaison proposée pourra être représentée selon notre convention par un groupe de lettres françaises et grecques, et aura été obtenue. Les deux espèces de combinaisons se correspondent une à une, et leur nombre est identique.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 838

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 528);

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

Soit q_0 le quotient par $1.2.3\ldots p$ du produit de p nombres consécutifs, le premier étant $(a-1)p$; soit q_1 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-a$; q_2 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-2a$, et ainsi de suite; en s'arrêtant dès qu'on trouvera un nombre nul ou négatif, on aura la relation

$$a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \ldots.$$

J.-J.-A. MATHIEU.

1. Soient a et p deux nombres entiers positifs quelconques; nous avons identiquement, pour toute valeur de x,

$$(x^a-1)^p x^{-1} = x^{ap-1} - \frac{p}{1} x^{a(p-1)-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} x^{a(p-2)-1} - \ldots (-1)^p x^{-1}.$$

Prenons les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des deux membres de cette identité, remplaçons x par 1, et divisons par $1.2.3\ldots p$, nous trouvons

$$a^p = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \ldots + 1,$$

ou bien

$$(1) \qquad a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \ldots,$$

ce qui est la relation proposée.

2. Pour généraliser, considérons l'identité

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}(x^a-1)^p x^{-k} &= x^{ap-k} - \frac{p}{1}x^{a(p-1)-k}\\ &+\frac{p(p-1)}{1.2}x^{a(p-2)-k} - \ldots (-1)^p x^{-k}.\end{aligned}\right.$$

Prenons les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des deux membres, remplaçons x par 1, divisons par $1.2.3\ldots p$, et convenons de désigner par C_m^n le quotient par $1.2.3\ldots n$ du produit de n nombres entiers consécutifs décroissants à partir de m, nous trouvons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}a^p &= C^p_{ap-k} - \frac{p}{1}C^p_{a(p-1)-k}\\ &+\frac{p(p-1)}{1.2}C^p_{a(p-2)-k} - \ldots (-1)^p C^p_{-k},\end{aligned}\right.$$

identité qui se réduit à la proposée pour $k=1$.

3. On pourrait généraliser davantage en prenant les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des deux membres de l'identité (2). Quel que soit l'entier n, la dérivée $n^{\text{ième}}$ du second membre est toujours très-facile à calculer. La dérivée $n^{\text{ième}}$ du premier membre, pour $x=1$, est nulle si n est inférieur à p ; elle se réduit à $1.2.3\ldots p.a^p$ si n égale p ; enfin, si n est supérieur à p, il suffit pour l'obtenir de savoir calculer les valeurs des dérivées de $(x^a-1)^p$; or on voit facilement que, pour $x=1$, la dérivée $(p+r)^{\text{ième}}$ de $(x^a-1)^p$ est égale à $1.2.3\ldots(p+r)$, multiplié par le coefficient de y^r dans le développement de

$$\left[y^{a-1}+\frac{a}{1}y^{a-2}+\frac{a(a-1)}{1.2}y^{a-3}+\ldots+\frac{a(a-1)}{1.2}y+\frac{a}{1}\right]^p.$$

4. Il est évident que, p étant un nombre entier positif, l'identité (3) subsiste pour toutes les valeurs réelles de a

et de k. Donnons aux lettres a et k des valeurs entières quelconques (positives, nulles ou négatives) : tous les termes de (3) seront des nombres entiers. Supposons de plus que p soit premier : au second membre, à l'exception des deux extrêmes, tous les termes auront leurs coefficients divisibles par p. Si donc nous remplaçons l'expression $(-1)^p C^p_{-k}$ par C^p_{k+p-1}, qui lui est évidemment égale, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

THÉORÈME. — *Quels que soient les entiers a et k, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{ap-k} + C^p_{k+p-1} - a^p$$

est divisible par p.

COROLLAIRE. — *Quel que soit l'entier a, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{ap} - a^p$$

est divisible par p.

COROLLAIRE. — *Quels que soient les entiers k et m, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{mp^2-k} + C^p_{k+p-1}$$

est divisible par p.

COROLLAIRE. — *Quel que soit l'entier m, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{mp^2-1} + 1$$

est divisible par p.

Note. — Nous avons reçu deux autres bonnes solutions de la question 838 : l'une est de M. D. Thomas, de Margam ; l'autre de M. E. Pellet, élève de l'École Normale.

Question 951

(voir 2e série, t. VIII, p. 336);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3} + \ldots.$$

(LAISANT.)

M. Serret, dans sa *Trigonométrie* (p. 258, 4e édition), a démontré les deux formules suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \tan x = 2^2(2^2-1)B_1\dfrac{x}{1.2} + \ldots \\ \qquad + 2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\dfrac{x^{2n-1}}{1.2.\ldots 2n} + \ldots, \end{cases}$$

$$(2)\quad \cot x = \frac{1}{x} - 2^2 B_1 \frac{x}{1.2} - \ldots - 2^{2n}B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} - \ldots,$$

où

$$B_\mu = \frac{1.2.3\ldots 2\mu}{2^{2\mu-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \frac{1}{4^{2\mu}} + \ldots\right).$$

La seconde formule peut s'écrire

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = 2^2 B_1 \frac{x}{1.2} + \ldots + 2^{2n}B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} + \ldots.$$

En vertu de la première, le coefficient de $\dfrac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}$ dans la somme

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3} + \ldots$$

est

$$2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{6n}} + \ldots\right) = 2^{2n}B_n,$$

car la somme entre parenthèses égale

$$\frac{\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Les deux membres de l'égalité à démontrer s'expriment donc par deux séries identiques, ce qui démontre la formule.

Note. — M. Moret-Blanc nous a adressé des solutions des questions 931, 935, 943, peu différentes de celles qui ont déjà été publiées dans les *Nouvelles Annales* (t. VIII, p. 516, 520, 548).

CORRESPONDANCE.

Nous mettons sous les yeux de nos lecteurs une Note intéressante de M. Catalan sur un de nos derniers numéros.

Le théorème de M. Lemoine, cité par M. Laurent, et démontré par M. Doucet (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. VIII, p. 266), ne me paraît pas nouveau. Vers 1841, avant la publication des *règles* de Bertrand (*Journal de Liouville*, t. VII), j'avais eu l'idée de comparer une série à *termes positifs* :

$$(1) \qquad \frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}+\ldots+\frac{1}{A_n}+\ldots$$

à la série

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\ldots$$

dans laquelle

$$a_1 = A_2 - A_1 = \Delta . A_1,$$
$$a_2 = A_3 - A_2 = \Delta . A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_n = A_{n+1} - A_n = \Delta . A_n.$$

En cherchant aujourd'hui dans mes anciens cahiers, j'ai retrouvé la Note que j'avais préparée sur ce sujet, mais que je n'ai pas fait imprimer, les *règles* de Bertrand rendant inutiles les règles particulières auxquelles j'étais arrivé. Quoi qu'il en soit, j'extrais de cette Note le passage suivant :

1° *Si la série* (2) *a le même degré de divergence que la série harmonique, ou si elle est moins divergente que celle-ci, la série* (1) *est convergente;*

2° *Si la série* (2) *est plus divergente que la série harmonique, et que le dénominateur* a_n *ait une limite, la série* (1) *est divergente;*

3° *Si la série* (2) *est plus divergente que la série harmonique, et que le dénominateur* a_n *croisse indéfiniment avec* n, *on ne peut rien affirmer touchant la convergence ou la divergence de la série* (1).

Le théorème de M. Lemoine est compris dans la première partie du mien; car la relation

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n = \text{const.},$$

ou

$$\Delta^2 . A_n = \text{const.} \ (*)$$

entraîne celle-ci :

$$A_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2;$$

et, du moment que A_n est sensiblement proportionnel à n^2, la série (1) est convergente.

Du reste, comme je le disais tout à l'heure, ces diverses règles particulières sont devenues inutiles depuis la publication de l'intéressant Mémoire de Bertrand et de mon *Traité élémentaire des séries* (p. 17, Théorème XIII).

(*) Ainsi que le fait observer M. Doucet, il suffit de considérer le cas où $\Delta^2 . A_n = \text{const.}$

En réponse aux observations de M. Vallès (p. 20, numéro de janvier 1870), M. Catalan nous écrit qu'il croit n'avoir à modifier, en rien, la démonstration donnée à la page 458 des *Nouvelles Annales* (octobre 1869). M. Catalan admet l'équation $e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}$, et nie qu'elle conduise à l'équation $e^{-2\pi} = e^{-4\pi}$.

QUESTIONS.

979. Étant donnée la fonction

$$y = A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots + A_n \cos nx,$$

déterminer les coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, de manière que, pour $x = \frac{\pi}{n+1}$, y prenne la valeur de $y_1, \ldots$, et que, pour $x = \frac{n\pi}{n+1}$, $y = y_n$; $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ étant des quantités données. (H. Brocard.)

980. Une ellipse de grandeur constante est mobile autour de son centre, tandis qu'une droite passant par un point fixe demeure constamment parallèle au grand axe. Trouver le lieu des points d'intersection de la droite et de l'ellipse. Déduire analytiquement cet énoncé de l'énoncé 933. (A. Guébhard.)

981. On coupe une surface du second degré par un plan; aux différents points de l'intersection, on mène les normales à la surface; par un point de l'espace, on mène des droites égales et parallèles aux longueurs interceptées sur ces normales entre leur pied sur la surface et le plan de symétrie : les extrémités de toutes ces droites se trouvent sur une conique. (E. Laguerre.)

982. Soient A et B deux points d'une ellipse dont F et G sont les foyers; les droites FA et GB se coupent au point D et les droites FB et GA au point E.

Désignons respectivement par φ, γ, η et δ les angles

AFB, AGB, AEB, ADB.

Démontrer les relations suivantes :

$$FA.FB \sin^2 \frac{\varphi}{2} = GA.GB.\sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

$$FA.GB.\sin^2 \frac{\delta}{2} = GA.FB.\sin^2 \frac{\eta}{2}.$$

(LAGUERRE.)

983. Imaginons deux ellipses concentriques, l'une intérieure et l'autre extérieure, dont les axes ont les mêmes directions. Cela posé, quelles relations doivent exister entre les demi-axes de ces deux ellipses pour que la courbe *polaire réciproque* d'une d'elles par rapport à l'autre soit un cercle de rayon donné?

(HARKEMA.)

NOTE

Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide;

PAR M. HOÜEL,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans un Mémoire publié en 1868 dans le *Giornale di Matematiche* de Naples, et dont une traduction française paraît en ce moment dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, M. Beltrami a exposé la Géométrie des surfaces de courbure constante négative, et est parvenu à cette conclusion importante, que cette Géo-

métrie est identique avec ce que serait la Géométrie du plan, si l'on écartait le principe de la théorie des parallèles, connu sous le nom de *postulatum* d'Euclide.

Cette dernière Géométrie a été traitée simultanément par le professeur russe Lobatchefsky et par l'officier hongrois Jean Bolyai. Ces deux mathématiciens, en cherchant à développer une Géométrie hypothétique du plan, ont fondé, par le fait, la théorie des figures formées par les lignes géodésiques d'une surface de courbure constante négative, ou surface *pseudosphérique*, suivant la dénomination proposée par M. Beltrami ; en sorte que leurs recherches s'appliquent à des objets parfaitement réels, indépendamment de l'hypothèse qu'ils avaient prise pour point de départ. Mais cette Géométrie est la seule que l'on ait le droit d'appliquer au plan tant que, pour une raison quelconque, on ne sera pas à même d'affirmer la vérité du principe des parallèles.

Lobatchefsky, par des considérations fondées sur les observations de la parallaxe annuelle des étoiles, a rigoureusement démontré que, dans tous les triangles que les hommes auront jamais à mesurer, la somme des angles ne pourra pas différer de deux angles droits d'une quantité appréciable. Si l'on ne veut pas se contenter de cette preuve expérimentale qui suffit pourtant, et au delà, dans toutes les applications de la Geométrie, et surpasse en précision toutes celles qui servent de base aux principes de la Mécanique, et dont on n'a jamais songé à contester la valeur ; il est naturel alors que l'on cherche à s'en assurer en partant des données précédemment admises, c'est-à-dire de l'existence de la ligne droite (*) et du plan.

(*) Les conditions qu'implique l'existence de la ligne droite ont été énumérées dans l'article de M. Bertrand, inséré dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, page 17 (3 janvier 1870). Il

Il faut donc prouver, si l'on peut, que l'hypothèse de la somme des angles d'un triangle rectiligne moindre que deux angles droits conduit nécessairement à une contradiction quand on en développe toutes les conséquences.

Mais, dans cette démonstration *par l'absurde*, il faut avoir soin de ne négliger aucune des conséquences de l'hypothèse que l'on veut combattre. Sans cela les contradictions que l'on rencontrera pourront toujours être attribuées au changement d'hypothèse que l'on aura introduit dans le courant du raisonnement. C'est l'oubli de cette règle élémentaire de logique qui a conduit tant de géomètres à proposer des démonstrations dans lesquelles un plus mûr examen fait apercevoir des pétitions de principe.

Sans vouloir préjuger la question de savoir si, comme Ampère l'indique en passant (*), on peut espérer trouver dans les constructions à trois dimensions le moyen d'arriver à la solution tant cherchée, on peut affirmer d'avance, une fois pour toutes, que jamais les méthodes fondées sur des constructions planes ne pourront conduire à ce but.

En effet, ces constructions, pour être concluantes, doivent être faites sans s'appuyer sur le principe que l'on veut établir, et, par suite, en admettant l'hypothèse contraire. Or, dans ce cas, comme l'ont établi Lobatchefsky

---

nous semble que l'auteur indique une condition de trop, en affirmant que la propriété de la ligne droite d'être la plus courte entre deux de ses points doit être admise sans démonstration. *Voy.* les *Éléments d Euclide*, livre I, proposition 20, et l'Ouvrage de M. Duhamel (*Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement*), tome II, pages 7, 312, 319, et le Chapitre VI, pages 411 à 417.

(*) *Essai sur la Philosophie des Sciences*, tome I, page 67. *Voy.* le savant Mémoire de M. Genocchi intitulé : *Dei primi Principii della Meccanica e della Geometria in relazione al Postulato d'Euclide*, page 35. Florence, 1869.

et Bolyai, la Géométrie du plan rentrera, comme cas particulier, dans celle des surfaces de courbure constante négative, et les constructions faites sur le plan ne pourront jamais conduire à des conclusions autres que celles qu'on en tirerait si elles étaient faites sur ces surfaces courbes.

Mais on sait que, sur une surface de courbure constante négative, la somme des angles de tout triangle géodésique est moindre que deux angles droits. Donc les constructions dont il s'agit, ne pouvant amener à une conclusion contraire sur la surface courbe, ne le pourront jamais non plus sur le plan.

Cette assertion se vérifie facilement par un examen attentif de la démonstration présentée récemment par M. Carton à l'Académie des Sciences de Paris. D'après un théorème connu, l'aire d'un polygone géodésique de n côtés, sur une surface de courbure constante négative, est proportionnelle à la différence entre la somme de ses angles et $2n - 4$ angles droits. Il résulte de là que cette aire a une valeur constamment inférieure à un certain maximum. Si l'on veut fonder la démonstration du principe des parallèles sur la considération d'un hexagone, il faut que celui-ci soit constructible indépendamment du principe en question, c'est-à-dire en laissant provisoirement au plan toutes les propriétés des surfaces de courbure constante négative. Mais alors l'aire de cet hexagone ne pourra plus renfermer dans son intérieur un nombre illimité de triangles égaux entre eux et de grandeur finie. Il faudra donc, passé une certaine limite, que le périmètre de l'hexagone se coupe lui-même, auquel cas la démonstration ne sera plus possible.

NOTE SUR LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE;

PAR M. PAINVIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

1. Deux figures homographiques peuvent-elles être en général amenées par un déplacement convenable à être homologiques? telle est la question que je me propose d'étudier.

On sait que les formules générales de la *transformation homographique* sont :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a x' + b y' + c z' + d}{m x' + n y' + p z' + q}, \\ y = \dfrac{a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1}{m x' + n y' + p z' + q}, \\ z = \dfrac{a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2}{m x' + n y' + p z' + q}. \end{cases}$$

Je désignerai par premier système (ou système F) l'ensemble des points auquel appartient le point (x, y, z), et par deuxième système (ou système F′) l'ensemble des points auquel appartient le point (x', y', z').

Je rapporte d'abord les *deux figures* à un nouveau système d'axes (OX, OY, OZ) parallèles aux anciens (Cx, Cy, Cz), c'est-à-dire que je pose à la fois

$$(1^\circ)\qquad \begin{cases} x = X + x_0, & x' = X' + x_0, \\ y = Y + y_0, & y' = Y' + y_0, \\ z = Z + z_0; & z' = Z' + z_0, \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées par rapport à l'ancien système de la nouvelle origine O.

Maintenant je fais tourner la première figure F, *sans*

changer la position de la figure F′, autour de la nouvelle origine O ; les axes OX, OY, OZ, entraînés dans le mouvement de la première figure, seront venus se placer respectivement en OX_1, OY_1, OZ_1, par exemple; je représenterai par λ, μ, ν les angles de OX_1 avec les axes fixes OX, OY, OZ; par λ_1, μ_1, ν_1, ceux de OY_1; par λ_2, μ_2, ν_2, ceux de OZ_1.

D'après cela, si, après la rotation, ξ, η, ζ sont les coordonnées (par rapport aux axes OX, OY, OZ) d'un point M de la première figure, point dont les coordonnées étaient X, Y, Z avant la rotation, on aura

$$(2^\circ)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta,\\ Y &= \lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta,\\ Z &= \lambda_2\xi + \mu_2\eta + \nu_2\zeta. \end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue les valeurs (1°) et (2°) dans les formules (1), on trouve

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta\\ &\quad = \frac{(a - mx_0)X' + (b - nx_0)Y' + (c - px_0)Z' + U_0}{mX' + nY' + pZ' + R_0},\\ &\lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta\\ &\quad = \frac{(a_1 - my_0)X' + (b_1 - ny_0)Y' + (c_1 - py_0)Z' + V_0}{mX' + nY' + pZ' + R_0},\\ &\lambda_2\xi + \mu_2\eta + \nu_2\zeta\\ &\quad = \frac{(a_2 - mz_0)X' + (b_2 - nz_0)Y' + (c_2 - pz_0)Z' + W_0}{mX' + nY' + pZ' + R_0}, \end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$(2\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} U_0 &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d - x_0R_0,\\ V_0 &= a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 - y_0R_0,\\ W_0 &= a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 - z_0R_0,\\ R_0 &= mx_0 + ny_0 + pz_0 + q. \end{aligned}\right.$$

Les formules (2) établissent la correspondance entre les points homologues des deux figures F et F′, après que la première figure (F) a tourné autour du point O, la deuxième figure (F′) n'ayant pas changé de place. Ces deux figures sont toutes deux rapportées aux axes OX, OY, OZ.

On a ainsi introduit les *douze inconnues*

$$x_0,\ y_0,\ z_0;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1;\quad \lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2.$$

Les neuf dernières sont d'ailleurs liées entre elles par les *six relations*

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1, & \lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0,\\ \lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1, & \lambda_2\lambda+\mu_2\mu+\nu_2\nu=0,\\ \lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1; & \lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1=0,\end{cases}$$

ou par les relations inverses

$$(3\ bis)\quad \begin{cases} \lambda^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2=1, & \mu\nu+\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2=0,\\ \mu^2+\mu_1^2+\mu_2^2=1, & \nu\lambda+\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2=0,\\ \nu^2+\nu_1^2+\nu_2^2=1; & \lambda\mu+\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2=0.\end{cases}$$

En faisant usage des relations (3 *bis*), nous résoudrons les équations (2) par rapport à ξ, η, ζ; ceci fait, nous égalerons à zéro les coefficients de Y′ et de Z′ dans le numérateur de la valeur de ξ; puis ceux de X′ et Z′ dans la valeur de η; puis ceux de X′ et Y′ dans la valeur de ζ; et enfin nous égalerons entre eux les coefficients des variables restantes. Les valeurs de ξ, η, ζ se présenteront alors sous la forme suivante :

$$(4)\quad \begin{cases} \xi=\dfrac{kX'+U_1}{mX'+nY'+pZ'+R_0},\\[2ex] \eta=\dfrac{kY'+V_1}{mX'+nY'+pZ'+R_0},\\[2ex] \zeta=\dfrac{kZ'+W_1}{mX'+nY'+pZ'+R_0};\end{cases}$$

ce sont précisément les formules de la *transformation homologique;* car on pourra faire disparaître les constantes U_1, V_1, W_1, en déplaçant la *seconde figure* parallèlement à elle-même, sans modifier la nouvelle position de la *première figure;* il est inutile d'insister sur ce dernier déplacement.

En opérant comme je viens de l'indiquer, on est conduit aux neuf relations

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = m X_0 + k, \\ \lambda b + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = n X_0, \\ \lambda c + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = p X_0; \\ \mu a + \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = m Y_0, \\ \mu b + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = n Y_0 + k, \\ \mu c + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 = p Y_0; \\ \nu a + \nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 = m Z_0, \\ \nu b + \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 = n Z_0, \\ \nu c + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 = p Z_0 + k; \end{cases}$$

dans ces dernières égalités, on a posé

$$(6)\quad \begin{cases} X_0 = \lambda x_0 + \lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0, \\ Y_0 = \mu x_0 + \mu_1 y_0 + \mu_2 z_0, \\ Z_0 = \nu x_0 + \nu_1 y_0 + \nu_2 z_0. \end{cases}$$

On a donc en définitive *quinze relations* (3) et (5) entre les *treize indéterminées*

$$\lambda, \mu, \nu; \quad \lambda_1, \mu_1, \nu_1; \quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2; \quad X_0, Y_0, Z_0; \quad k;$$

car il est visible que, lorsqu'on connaîtra X_0, Y_0, Z_0, λ, μ, ν,..., les coordonnées x_0, y_0, z_0 de la nouvelle origine O seront immédiatement fournies par les équations (6).

2. Il s'agit maintenant de résoudre le système des équations (3) et (5).

Dans ce but, nous poserons

$$(7)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \text{puis} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a} = A, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial b} = B, \ldots, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_1} = A_1, \ldots;$$

nous ferons en outre

$$(8)\qquad \begin{cases} M = mA + nB + pC, \\ N = mA_1 + nB_1 + pC_1, \\ P = mA_2 + nB_2 + pC_2. \end{cases}$$

Des *neuf* équations (5), nous concluons immédiatement, eu égard aux relations (7) et aux notations (8), les valeurs suivantes des neuf inconnues λ_i, μ_i, ν_i en fonction des quatre restantes X_0, Y_0, Z_0, k :

$$(9)\quad \begin{cases} \lambda\,\Delta = MX_0 + kA, & \mu\Delta = MY_0 + kB, & \nu\Delta = MZ_0 + kC, \\ \lambda_1\Delta = NX_0 + kA_1, & \mu_1\Delta = NY_0 + kB_1, & \nu_1\Delta = NZ_0 + kC_1, \\ \lambda_2\Delta = PX_0 + kA_2; & \mu_2\Delta = PY_0 + kB_2; & \nu_2\Delta = PZ_0 + kC_2. \end{cases}$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à écrire que les *six* relations (3) sont vérifiées par les valeurs (9) des λ_i, μ_i, ν_i.

Auparavant je substituerai aux inconnues X_0, Y_0, Z_0, les inconnues t, t_1, t_2, définies par les égalités suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} t = A\,X_0 + B\,Y_0 + C\,Z_0, \\ t_1 = A_1X_0 + B_1Y_0 + C_1Z_0, \\ t_2 = A_2X_0 + B_2Y_0 + C_2Z_0, \end{cases}$$

d'où résulte

$$(10\ bis)\qquad \begin{cases} \Delta X_0 = at + a_1t_1 + a_2t_2, \\ \Delta Y_0 = bt + b_1t_1 + b_2t_2, \\ \Delta Z_0 = ct + c_1t_1 + c_2t_2, \end{cases}$$

et je poserai encore

$$(11)\qquad r^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2.$$

En remplaçant X_0, Y_0, Z_0, par leurs valeurs (10 *bis*) dans cette dernière égalité, on a d'abord

$$(12)\quad \Delta^2 r^2 = (at + a_1 t_1 + a_2 t_2)^2 + (bt + b_1 t_1 + b_2 t_2)^2 + (ct + c_1 t_1 + c_2 t_2)^2;$$

en écrivant ensuite que les *six* équations (3) sont vérifiées, il vient, eu égard aux notations (10) et (11),

$$(13)\quad \begin{cases} \Delta^2 = k^2(A^2 + B^2 + C^2) + M^2 r^2 + 2kMt, \\ \Delta^2 = k^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) + N^2 r^2 + 2kNt_1, \\ \Delta^2 = k^2(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) + P^2 r^2 + 2kPt_2; \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} k^2(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) + NPr^2 + k(Pt_1 + Nt_2) = 0, \\ k^2(A_2A + B_2B + C_2C) + PMr^2 + k(Mt_2 + Pt) = 0, \\ k^2(A\,A_1 + B\,B_1 + C\,C_1) + MNr^2 + k(Nt + Mt_1) = 0. \end{cases}$$

On a donc, entre les *cinq inconnues* t, t_1, t_2, k, r, les *sept équations* (12), (13), (14).

Des équations (13) je tire t, t_1, t_2, en fonction de r^2 et k^2, et je substitue ces valeurs dans les équations (14) et (12). La substitution, effectuée d'abord dans les équations (14), conduit aux trois équations suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} k^2[N^2(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) + P^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \\ \qquad - 2NP(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)] = \Delta^2(N^2 + P^2), \\ k^2[P^2(A^2 + B^2 + C^2) + M^2(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) \\ \qquad - 2PM(A_2A + B_2B + C_2C)] = \Delta^2(P^2 + M^2), \\ k^2[M^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) + N^2(A^2 + B^2 + C^2) \\ \qquad - 2MN(AA_1 + BB_1 + CC_1)] = \Delta^2(M^2 + N^2). \end{cases}$$

Or ces trois dernières équations ne renferment plus que la seule inconnue k^2; on conclut de là les *deux équations*

de condition suivantes :

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(NA_2 - PA_1)^2 + (NB_2 - PB_1)^2 + (NC_2 - PC_1)^2}{N^2 + P^2} \\ = & \frac{(PA - MA_2)^2 + (PB - MB_2)^2 + (PC - MC_2)^2}{P^2 + M^2} \\ = & \frac{(MA_1 - NA)^2 + (MB_1 - NB)^2 + (MC_1 - NC)^2}{M^2 + N^2}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, pour que deux figures homographiques dans l'espace puissent être amenées à être homologiques, il y a à vérifier deux équations de condition, savoir les relations (16). Ces deux conditions sont *nécessaires* et *suffisantes*; il vient d'être démontré qu'elles sont nécessaires, car il est visible que les égalités (16) ne se réduisent pas à des identités, vu l'indépendance des constantes arbitraires M, N, P, A, B, C, ... J'ajoute qu'elles sont suffisantes : si l'on suppose, en effet, que les relations (16) soient vérifiées, les équations (15) donneront d'abord pour l'inconnue k une valeur unique et déterminée. La substitution, dans l'équation (12), des valeurs t, t_1, t_2, déduites des égalités (13), conduit à une équation bicarrée par rapport à r; à chaque valeur de r^2 correspond, d'après les équations (13), une seule et unique valeur pour chacune des inconnues t, t_1, t_2, et par conséquent, d'après les équations (10 *bis*), une seule et unique valeur pour chacune des inconnues X_0, Y_0, Z_0. Les équations (9) nous fourniront ensuite une valeur unique pour chacune des neuf inconnues restantes, λ_i, μ_i, ν_i, car on peut toujours assujettir la constante k a être positive, sans restreindre la généralité de la question. On trouve donc ainsi *deux solutions*, et deux seulement.

3. Il me reste enfin à donner la signification géométrique des équations de condition (16).

Dans la seconde figure (F′), le cercle imaginaire de l'infini a pour équations

$$(17) \qquad t' = 0, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Résolvons les équations (1) par rapport à x', y', z'; pour cela, multiplions-les respectivement par A, A_1, A_2, puis par B, B_1, B_2, et enfin, par C, C_1, C_2; on trouve ainsi

$$(1^\circ) \quad \begin{cases} \Delta x' - (mx' + ny' + pz')X + e - qX = 0, \\ \Delta y' - (mx' + ny' + pz')Y + f - qY = 0, \\ \Delta z' - (mx' + ny' + pz')Z + g - qZ = 0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(18) \quad \begin{cases} X = Ax + A_1 y + A_2 z, \\ Y = Bx + B_1 y + B_2 z, \\ Z = Cx + C_1 y + C_2 z, \end{cases} \qquad \begin{cases} e = Ad + A_1 d_1 + A_2 d_2, \\ f = Bd + B_1 d_1 + B_2 d_2, \\ g = Cd + C_1 d_1 + C_2 d_2. \end{cases}$$

Si maintenant on multiplie les équations (1°) par m, n, p, respectivement, et qu'on ajoute, on en conclut la valeur de l'expression $(mx' + ny' + pz')$; de là résulte immédiatement les valeurs cherchées pour x', y', z'.

Après avoir posé

$$(19) \quad \begin{cases} Q = Mx + Ny + Pz, \\ S = Md + Nd_1 + Pd_2, \end{cases}$$

on obtient définitivement

$$(20) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{(q\Delta - \delta)X + e(Q - \Delta)}{\Delta(\Delta - Q)}, \\ y' = \dfrac{(q\Delta - \delta)Y + f(Q - \Delta)}{\Delta(\Delta - Q)}, \\ z' = \dfrac{(q\Delta - \delta)Z + g(Q - \Delta)}{\Delta(\Delta - Q)}. \end{cases}$$

De ces formules résultent les conséquences suivantes.

Au plan de l'infini, considéré comme appartenant à la

deuxième figure (F′), correspond, dans la première figure (F), le plan à distance finie

$$Q - \Delta = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Mx + Ny + Pz - \Delta = 0.$$

Au cercle imaginaire de l'infini (17), considéré comme appartenant à la deuxième figure (F′), correspond, dans la première figure (F), la courbe

$$\left\{\begin{aligned} &[(q\Delta - \delta)X + e(Q - \Delta)]^2 \\ &+ [(q\Delta - \delta)Y + f(Q - \Delta)]^2 \\ &+ [(q\Delta - \delta)Z + g(Q - \Delta)]^2 = 0, \\ &Q - \Delta = 0; \end{aligned}\right.$$

en ayant égard à la seconde équation, l'ensemble de ces deux équations peut se remplacer par l'ensemble des deux équations suivantes :

$$(21) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, \quad Mx + Ny + Pz - \Delta = 0.$$

Je vais chercher maintenant les conditions pour que les équations (21) représentent un cercle.

Pour cela, je prendrai l'équation générale des surfaces du second ordre passant par la courbe (21), savoir :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + (Mx + Ny + Pz - \Delta)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon) = 0,$$

et j'écrirai que cette équation représente une sphère.

Eu égard aux notations (18), on trouve

$$(22) \quad \left\{\begin{aligned} &A^2 + B^2 + C^2 + \alpha M \\ &= A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + \beta N = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 + \gamma P = \rho, \\ &2(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) + \beta P + \gamma N = 0, \\ &2(A_2A + B_2B + C_2C) + \gamma M + \alpha P = 0, \\ &2(AA_1 + BB_1 + CC_1) + \alpha N + \beta M = 0. \end{aligned}\right.$$

Des premières équations (22), on tire α, β, γ, en fonc-

tion de ρ, et en substituant ces valeurs dans les trois équations suivantes, il vient

$$(23)\quad \begin{cases} (NA_2 - PA_1)^2 + (NB_2 - PB_1)^2 + (NC_2 - PC_1)^2 = \rho(N^2 + P^2), \\ (PA - MA_2)^2 + (PB - MB_2)^2 + (PC - MC_2)^2 = \rho(P^2 + M^2), \\ (MA_1 - NA)^2 + (MB_1 - NB)^2 + (MC_1 - NC)^2 = \rho(M^2 + N^2). \end{cases}$$

L'élimination de ρ entre ces dernières équations conduira aux équations de condition nécessaires et suffisantes pour que la courbe de la première figure, correspondant au cercle imaginaire de l'infini dans la deuxième figure, soit également un cercle. Or nous retrouvons ainsi les équations de condition (16) déjà obtenues au n° 2.

J'ajouterai, sans en donner la démonstration, la remarque suivante : « Si, au cercle imaginaire de l'infini, » considéré comme appartenant à la figure (F′), corres- » pond un cercle dans la figure (F), il arrivera néces- » sairement que, au cercle imaginaire de l'infini, consi- » déré comme appartenant à la figure (F), correspon- » dra aussi un cercle dans la figure (F′). »

4. De cette analyse je conclus les théorèmes suivants :

1° *Deux figures* DE L'ESPACE *homographiques ne peuvent pas, en général, être amenées à être homologiques.*

2° *Pour que deux figures homographiques de l'espace puissent être placées homologiquement, il faut et il suffit que la courbe, qui, dans l'une d'elles, correspond au cercle imaginaire de l'infini appartenant à l'autre, soit également un cercle. Et alors il y a deux manières, et deux seulement, d'amener les deux figures à être homologiques.*

3° *Pour amener deux figures homographiques à être homologiques, dans le cas où la chose est possible, on pourra opérer comme il suit :*

Soient I *le plan de la figure* (F) *correspondant au*

plan de l'infini dans la figure (F'), *et* J' *le plan de la figure* (F') *correspondant au plan de l'infini dans la figure* (F); *on fera tourner la figure* (F) *de façon à rendre le plan* I *parallèle au plan* J'; *on imaginera ensuite le cône passant par le cercle imaginaire à l'infini dans la figure* (F'), *et le cercle* (*maintenant parallèle*) *qui lui correspond dans la figure* (F) : *soit* O *le sommet de ce cône. Si maintenant* O' *est le point qui, dans la figure* (F'), *correspond au point* O, *considéré comme appartenant à la figure* (F), *on fera glisser la figure* (F') *parallèlement à elle-même jusqu'à ce que le point* O' *vienne coïncider avec* O, *puis on le fera tourner d'un angle convenable autour d'une perpendiculaire au plan* J' *et passant par le point* O; *après ce double déplacement, les deux figures seront placées homologiquement; le point* O *sera le centre d'homologie, et le plan d'homologie sera parallèle au plan* J'.

La démonstration de cette dernière proposition peut se faire très-simplement.

NOTE RELATIVE A QUELQUES CAS DE CONVERGENCE OU DE DIVERGENCE DES SÉRIES.

Par UN ABONNÉ.

---

1. Soit la série

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont les termes sont positifs et tendent vers la limite o à mesure que n augmente. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ayant été mis sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, *la série est convergente quand*

lim. $n\alpha$ *est supérieure à* 1; *elle est divergente quand* lim. $n\alpha$ *est inférieure à* 1.

On peut donner de ce théorème bien connu la démonstration suivante :

1° Si lim. $n\alpha > 1$, il sera toujours possible d'assigner un nombre m compris entre 1 et la limite, tel qu'à partir d'une valeur suffisamment grande, mais finie, de n, l'on ait $n\alpha > m$ ou $\alpha > \frac{m}{n}$, et par conséquent

$$1 + \alpha > 1 + \frac{m}{n}.$$

Cela posé, soit $\frac{p}{q}$ une fraction à numérateur et à dénominateur entiers, telle que

$$1 < \frac{p}{q} < m,$$

on pourra toujours écrire

$$1 + \frac{m}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

En effet, cette inégalité revient à la suivante:

$$n^{p-q}(n + m)^q > (n + 1)^p,$$

ou, en réduisant,

$$n^{p-1}(mq - p) + \ldots > 0.$$

Or, $mq - p$ étant positif, on pourra toujours donner à n une valeur assez grande pour que le polynôme composant le premier membre de la précédente inégalité soit positif.

S'il en est ainsi, l'on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}},$$

d'où

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n^{\frac{p}{q}}}{(n+1)^{\frac{p}{q}}}.$$

Donc, les termes de la série (1) décroissent plus rapidement que ceux de la série

$$\frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+2)^{\frac{p}{q}}} + \ldots,$$

et l'on sait que cette dernière série est convergente quand $\frac{p}{q} > 1$.

2° Si lim. $n\alpha < 1$, on pourra toujours trouver un nombre m compris entre 1 et cette limite, et auquel $n\alpha$ sera certainement inférieur. De sorte que, pour des valeurs suffisamment grandes, mais finies de n, on aura

$$n\alpha < m \quad \text{ou} \quad \alpha < \frac{m}{n},$$

et par conséquent

$$1 + \alpha < 1 + \frac{m}{n}.$$

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction à numérateur et à dénominateur entiers telle, que l'on ait

$$m < \frac{p}{q} < 1,$$

on pourra écrire

$$1 + \frac{m}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}};$$

en effet, cette inégalité revient à la suivante :

$$(n+m)^q < (n+1)^p n^{q-p},$$

ou, en réduisant,

$$n^{q-1}(p - mq) + \ldots > 0,$$

inégalité toujours vérifiée pour une valeur suffisamment grande de n, puisque $p - mq$ est positif; donc

$$1 + \alpha < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n^{\frac{p}{q}}}{(n+1)^{\frac{p}{q}}}.$$

Les termes de la série (1) croissent plus rapidement que ceux de la série

$$\frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{p}{q}}} + \frac{1}{(n+2)^{\frac{p}{q}}} + \ldots,$$

que l'on sait être divergente, puisque $\frac{p}{q}$ est moindre que 1.

Le théorème énoncé est donc démontré.

2. Il reste à examiner les cas où $\lim. n\alpha = 1$.

Dans ce cas, α peut être mis sous la forme

$$\alpha = \frac{1}{n}[1 + \varphi(n)],$$

$\varphi(n)$ ayant pour limite 0.

Soit k la limite de $n\varphi(n)$ et L un nombre supérieur à k, à partir d'une valeur suffisamment grande de n, on aura toujours

$$n\varphi(n) < \mathrm{L} \quad \text{ou} \quad \varphi(n) < \frac{\mathrm{L}}{n},$$

d'où

$$\alpha < \frac{1}{n} + \frac{\mathrm{L}}{n^2},$$

et

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{L}{n^2}} > \frac{n^2}{n^2+n+L}.$$

Or on peut toujours déterminer un nombre i tel, que l'on ait

$$\frac{n^2}{n^2+n+L} > \frac{n-i}{n-i+1};$$

il suffit pour cela de vérifier l'inégalité

$$n(L-i) - Pi < 0,$$

laquelle a toujours lieu si $L < i$.

Donc, à partir d'un certain rang, les termes de la série (1) croîtront plus rapidement que ceux de la série

$$\frac{1}{n-i} + \frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{n-i+2} + \ldots;$$

et, puisque cette dernière série est divergente, la série (1) le sera.

Il ne peut y avoir de doute que si $n\varphi(n)$ est infini à la limite.

3. *Règle de Gauss.* — La question a été traitée par M. Bertrand dans son *Traité de calcul différentiel*, p. 240, par M. Rouché, *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. V, p. 10, et par M. Brisse, *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. IX, p. 36.

La règle donnée par Gauss est la suivante : *Le rapport de deux termes consécutifs étant sous la forme de fraction rationnelle*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots},$$

la série sera convergente si

$$a - A + 1 < 0;$$

la série sera divergente si

$$a - A + 1 > 0;$$

la série sera divergente si

$$a - A + 1 = 0.$$

En effet,

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{A-a}{n} + \ldots + \frac{Kn^{\lambda-2} + Ln^{\lambda-3} + \ldots}{n^{\lambda} + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}}.$$

On voit que lim. $n\alpha = A - a$, et en appliquant les théorèmes précédents on arrive à la règle énoncée plus haut.

Faisons observer que, dans le cas où $A - a = 1$, $n\varphi(n)$ a pour limite o, et le principe du n° 2 est applicable.

Dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral*, p. 178, M. J.-A. Serret examine ce que devient la série du binôme

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n + \ldots. \end{array} \right.$$

quand on fait $x = \pm 1$.

Avec ce qui a été dit, la discussion est des plus faciles.

Soit d'abord m positif. La valeur absolue du rapport de deux termes consécutifs peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{1}{1 + \frac{1+m}{n-m}}.$$

Tant que m est positif, lim. $n\alpha$ est supérieure à 1. La série (2) est convergente pour $x = -1$, et *à fortiori* pour

$x = +1$; car si, dans le premier cas, les termes, à partir d'un certain rang, sont tous de même signe, ils sont alternativement positifs et négatifs dans le second.

Si m est négatif,

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1-m}{n+m}};$$

si $m > 1$ en valeur absolue, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est plus grand que 1, et les termes vont en croissant à partir d'un certain rang; donc la série est divergente, non-seulement pour $x = -1$, mais aussi pour $x = 1$.

Si $m < 1$ en valeur absolue, on a toujours $\lim . n\alpha < 1$, et la série sera divergente pour $x = -1$; mais elle sera convergente pour $x = 1$, puisque les termes finissent par décroître indéfiniment et sont alternativement positifs et négatifs.

DES INVARIANTS AU POINT DE VUE DES MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(suite et fin, voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 395);

PAR M. P. DE CAMPOUX.

II. *Géométrie analytique à trois dimensions.*

Nous nous occuperons exclusivement de l'équation du second degré à trois variables lorsque la réduction est faite, dans le cas des surfaces à centre, la surface étant rapportée à son centre, ou, si l'on veut, des invariants des coefficients des termes du second degré.

(Nous supposerons les coordonnées rectangulaires.)

1° *Recherche des invariants.*

Considérons l'équation de la surface rapportée à son centre et à ses plans principaux; cette équation

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + F = 0$$

nous servira de point de départ.

Si nous prenons des axes rectangulaires quelconques de même origine et que α, α', α'' désignent les cosinus des angles que ox' fait avec les trois axes ox, oy, oz, β, β', β'' les cosinus des angles que oy' fait avec les mêmes droites, et γ, γ', γ'' les cosinus des angles que oz' fait avec ces lignes, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, x' + \beta\, y' + \gamma\, z', \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}$$

Les termes du second degré $Sx^2 + S'y^2 + S''z^2$ se transforment dans les suivants :

$$S(\alpha x' + \beta y' + \gamma z')^2 + S'(\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z')^2 \\ + S''(\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z')^2.$$

Cette expression a la forme

$$Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'z'x' + 2B''x'y'$$

et

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= S\alpha^2 + S'\alpha'^2 + S''\alpha''^2, \\ A' &= S\beta^2 + S'\beta'^2 + S''\beta''^2, \\ A'' &= S\gamma^2 + S'\gamma'^2 + S''\gamma''^2, \\ B &= S\beta\gamma + S'\beta'\gamma' + S''\beta''\gamma'', \\ B' &= S\gamma\alpha + S'\gamma'\alpha' + S''\gamma''\alpha'', \\ B'' &= S\alpha\beta + S'\alpha'\beta' + S''\alpha''\beta''. \end{aligned} \right.$$

Nous savons que l'on a entre α, α', α'', β, β', β'',

$\gamma, \gamma', \gamma''$, les relations

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\
\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1,\\
\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1,\\
\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\\
\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0,\\
\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0.
\end{aligned}$$

Les invariants cherchés ne peuvent se trouver que dans les résultats de l'élimination des cosinus entre les équations (1). Nous allons procéder à cette élimination, en nous servant de la méthode que M. Bertrand a employée pour un autre but dans son Algèbre.

Je multiplie les deux membres de la première, de la sixième et de la cinquième équation du groupe (1) respectivement par α, β, γ; j'obtiens ainsi

$$A\alpha + B''\beta + B'\gamma = S\alpha.$$

En multipliant les deux membres de la sixième, de la deuxième et de la quatrième par α, β, γ, j'ai la relation

$$B''\alpha + A'\beta + B\gamma = S\beta.$$

En multipliant les deux membres de la cinquième, de la quatrième et de la troisième par α, β, γ, j'arrive à l'équation

$$B'\alpha + B\beta + A''\gamma = S\gamma.$$

Ces trois équations peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
(A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\
B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Ces trois relations sont homogènes en α, β, γ; elles ne

peuvent être satisfaites par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; car

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Donc, comme ces équations sont compatibles, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = \Delta$$

est nul.

L'équation $\Delta = 0$ est une équation résultant de l'élimination des angles entre les équations (1).

Il est aisé d'en trouver deux autres d'une façon analogue.

Multipliant les deux membres de la première, de la sixième et de la cinquième des équations (1) par α', β', γ', j'ai

$$A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma' = S'\alpha'.$$

Multipliant les deux membres de la sixième, de la deuxième et de la quatrième par α', β', γ', j'ai

$$B''\alpha' + A'\beta' + B''\gamma' = S'\beta',$$

et multipliant les deux membres de la cinquième, de la quatrième et de la troisième par α', β', γ', j'arrive à la relation

$$B'\alpha' + B''\beta' + A''\gamma' = S'\gamma'.$$

Ces trois relations donnent la relation suivante indépendante des angles :

$$\begin{vmatrix} A - S' & B'' & B' \\ B'' & A' - S' & B \\ B' & B & A'' - S' \end{vmatrix} = 0.$$

Opérant de même sur les équations (1) en faisant usage

des multiplicateurs α'', β'', γ'', l'on arriverait à l'équation

$$\begin{vmatrix} A - S'' & B'' & B' \\ B'' & A' - S'' & B \\ B' & B & A'' - S'' \end{vmatrix} = 0.$$

J'obtiens ainsi trois relations distinctes entre les coefficients A, A′, A″, B, B′, B″ et S, S′, S″, car la lettre S, par exemple, n'est que dans la première, la lettre S′ dans la deuxième et la lettre S″ dans la troisième; il est donc impossible de passer d'une combinaison de deux de ces équations à la troisième.

Je dis qu'il est inutile de chercher une équation distincte de ces trois équations et ne contenant pas les angles des axes; car j'imagine qu'il y ait quatre relations distinctes entre les coefficients de l'équation de l'ellipsoïde

$$(1)\quad Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'z'x' + 2B''x'y' - 1 = 0$$

et les coefficients de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On peut toujours supposer $F = -1$ sans nuire à la généralité.

Les quatre relations entre les coefficients de l'équation (1) et a, b, c, qu'on peut supposer connus, et la connaissance de deux points suffiraient pour déterminer l'ellipsoïde. Ainsi le centre, les axes et deux points suffiraient pour déterminer un ellipsoïde, c'est-à-dire que huit conditions suffiraient dans le cas où nous savons que neuf sont nécessaires.

Ainsi ces trois équations sont les seules distinctes; je vais maintenant en tirer les invariants. Si je représente l'une quelconque des trois quantités S, S′, S″ par z, il est aisé de voir que ces trois quantités S, S′, S″ satisfont à

l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} A - z & B'' & B' \\ B'' & A' - z & B \\ B' & B & A'' - z \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(A - z)(A' - z)(A'' - z) - (A - z)B^2$$
$$- (A' - z)B'^2 - (A'' - z)B''^2 + 2BB'B'' = 0,$$

ou en ordonnant

$$z^3 - (A + A' + A'')z^2$$
$$+ (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)z$$
$$+ AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'' = 0,$$

que je mettrai sous la forme

$$z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0.$$

Or

$$P = -(S + S' + S'')$$

et comme

$$S = -\frac{F}{a^2},$$

a étant l'axe principal qui coïncide avec l'ancien axe des x, et que

$$S' = -\frac{F}{b^2}, \quad S'' = -\frac{F}{c^2},$$

b et c étant les autres axes principaux ; or F ne change pas lorsque l'origine reste la même ; donc

$$P = -F\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

P est un invariant.

De même

$$Q = S'S'' + S''S + SS' = \frac{F^2}{b^2c^2} + \frac{F^2}{c^2a^2} + \frac{F^2}{a^2b^2}$$
$$= F^2\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right).$$

Donc Q est un invariant.

$$R = - SS'S'' = \frac{F^3}{abc},$$

R est aussi un invariant.

Donc

$$A + A' + A'', \quad B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA',$$
$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''$$

sont trois invariants. Or il ne peut y avoir plus de trois invariants distincts, car il ne peut y avoir plus de trois équations ne contenant pas les angles que font entre eux les différents axes, comme nous l'avons prouvé; ce sont donc les seuls invariants distincts, c'est-à-dire qu'on peut obtenir tous les autres à l'aide de ceux-là. Nous arrivons donc à cette conclusion que, dans la transformation des coordonnées, les termes du second degré fournissent trois invariants et que ces invariants sont les coefficients de l'équation en S.

2° *Interprétation géométrique des invariants.*

Considérons d'abord $A + A' + A''$.

Si nous faisons dans l'équation de l'ellipsoïde par exemple

$$y = 0, \quad z = 0,$$

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F = 0,$$

on a

$$A = -\frac{F}{x^2},$$

c'est-à-dire que A est proportionnel à l'inverse du carré du demi-diamètre compté sur l'axe des x; nous le représenterons par a'^2 :

$$A = -\frac{F}{a'^2};$$

de même

$$A' = -\frac{F}{b'^2}, \quad A'' = -\frac{F}{c'^2}.$$

Comme c'est un invariant, a, b, c désignant les axes, on aura

$$-\frac{F}{a'^2}-\frac{F}{b'^2}-\frac{F}{c'^2}=-\frac{F}{a^2}-\frac{F}{b^2}-\frac{F}{c^2}$$

ou

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Je figure la pyramide trirectangle $oA'B'C'$, dont les arêtes ont pour longueurs a', b', c',

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}=\frac{b'^2c'^2+c'^2a'^2+a'^2b'^2}{a'^2b'^2c'^2}.$$

Or

$$b'c'=2B'oC'=2A'B'C'\cos\alpha',$$

α' étant l'angle de la face $A'B'C'$ avec la face $B'oC'$; de même

$$c'a'=2A'B'C'\cos\beta',$$

β' étant l'angle de la face $A'B'C'$ avec la face $C'oA'$ et

$$a'b'=2A'B'C'\cos\gamma',$$

γ' étant l'angle de la face $A'B'C'$ avec la face $A'oB'$; on aura donc

$$\begin{aligned}b'^2c'^2+c'^2a'^2+a'^2b'^2 &= 4\,\overline{A'B'C'}^2(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma')\\ &= 4\,\overline{A'B'C'}^2.\end{aligned}$$

D'ailleurs

$$a'b'c'=2C'oB'\times oA'=6\text{ vol. }oA'B'C'=6A'B'C'\times H',$$

H' étant la distance du point o à la face $A'B'C'$; donc

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}=\frac{4}{36}\,\frac{\overline{A'B'C'}^2}{\overline{A'B'C'}^2\times H'^2};$$

donc

$$H'=H,$$

et l'on conclut que dans tout ellipsoïde les plans passant par les extrêmes de trois diamètres rectangulaires enveloppent une sphère.

Considérons l'invariant

$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''.$$

Je considère le diamètre conjugué de l'axe des z dont les équations sont

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0$$

ou

$$A\,x + B''y + B'z = 0,$$
$$B''x + A'y + B\,z = 0.$$

On tire de ces équations

$$\frac{x}{z} = \frac{BB'' - A'B'}{AA' - B''^2},$$
$$\frac{y}{z} = \frac{B'B'' - AB}{AA' - B''^2}.$$

Or l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + 2F = 0.$$

Si l'on porte dans cette équation les valeurs de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ qui annulent f'_x et f'_y, on aura

$$z^2\left(B'\frac{x}{z} + B\frac{y}{z} + A''\right) = -2F$$

ou

$$z^2(2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + AA'A'') = -2F(AA' - B''^2).$$

Si je représente la quantité entre parenthèses par Δ, j'aurai

$$\Delta . z^2 = -2F(A'A - B''^2).$$

Or on sait (I, 2°) que

$$A'A - B''^2 = \frac{16F^2}{P^2},$$

P étant le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués dans le plan des xy.

Remplaçant $A'A'' - B^2$ par cette valeur, nous avons

$$\Delta z^2 = -\frac{32F^3}{P^2};$$

donc

$$\Delta = -\frac{32F^3}{P^2z^2}.$$

Or Pz est le produit de la base du parallélépipède construit sur le diamètre du plan des xy et deux diamètres conjugués de ce plan par la hauteur z de ce parallélépipède. Ce parallélépipède est donc constant, c'est-à-dire que le parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués est constant.

Considérons enfin l'invariant

$$B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA';$$

on a (I, 2°)

$$-B^2 + A'A'' = \frac{16F^2}{P^2},$$

P étant la surface du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués dans le plan des yz. Or, H étant la hauteur du parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués, dont deux sont dans le plan des yz, on a, d'après l'interprétation géométrique de l'invariant précédent,

$$PH = K,$$

K étant une constante; donc

$$\frac{16F^2}{P^2} = \frac{16F^2}{K^2}H^2.$$

Par conséquent, on aura

$$A'A'' - B^2 = \frac{16F^2}{K^2}H^2,$$

pareillement

$$A''A - B'^2 = \frac{16F^2}{K^2} H'^2,$$

et

$$AA' - B''^2 = \frac{16F^2}{K^2} H''^2;$$

donc l'invariant en question est égal à

$$\frac{16F^2}{K^2}(H^2 + H'^2 + H''^2).$$

Or H est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent parallèle aux yz, de même H' est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent parallèle aux zx et H'' est la perpendiculaire au plan tangent parallèle aux xy. Ces plans tangents sont respectivement perpendiculaires; donc la somme des carrés des distances du centre à trois plans tangents rectangulaires à l'ellipsoïde est constante, c'est-à-dire, par une conclusion bien aisée à tirer, que le lieu des sommets est une sphère.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN THÉORÈME DE MONGE;

PAR M. J. WELSCH,
Élève de l'École Polytechnique.

Théorème. — *La sphère est la seule surface dont tous les points sont des ombilics, ou, ce qui revient au même, la sphère est la seule surface sur laquelle une courbe quelconque soit une ligne de courbure.*

Pour le démontrer je m'appuierai sur cette remarque évidente :

Il existe une infinité de surfaces développables dont les génératrices sont normales à une même courbe; mais si l'on prend pour première génératrice d'une de ces sur-

faces, l'une quelconque des normales menées à la courbe en un point déterminé, cette normale n'appartiendra qu'à l'une des surfaces en question. Par suite, si l'on sait que deux de ces surfaces ont une génératrice en commun, on en conclura qu'elles sont identiques.

Cela posé, soient A et B deux points quelconques pris sur la surface; par la normale (N) en A et par le point B faisons passer un plan, ce plan déterminera sur la surface une courbe normale à (N) et passant en B.

Cette courbe doit être une ligne de courbure de la surface; les normales à la surface en ses différents points appartiennent donc à une surface développable, qui est une de celles dont j'ai parlé; d'ailleurs, le plan de la courbe est aussi une de ces surfaces; comme elles ont une génératrice commune (N), elles coïncident, et, par suite, la normale en B à la surface rencontre la normale en A.

Si l'on prend un point C en dehors du plan considéré, la normale en ce point, devant rencontrer les normales en A et B, doit passer par le point O de concours de ces deux droites; toutes les normales concourent donc au même point O, et la surface est une sphère ayant son centre en ce point.

SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLÈMES CÉLÈBRES

Par la Méthode des Équipollences du Professeur Giusto Bellavitis;

PAR M. L. BÉZIAT.

I.

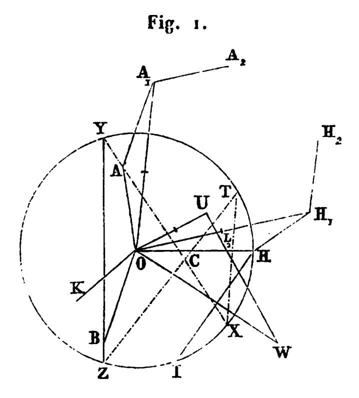
Un problème qui a marqué en quelque sorte les progrès successifs de la Géométrie est celui d'inscrire dans un cercle un triangle dont les côtés passent par trois

points donnés; les anciens n'ont pu le résoudre que dans le cas particulier où les trois points donnés sont en ligne droite; pendant plus de trente années le problème général fut tenté par les plus remarquables géomètres; enfin, en 1776, Lagrange en donna une solution algébrique, et Castillon une géométrique; il fut ensuite généralisé par un jeune géomètre, Giordano da Ollajano, qui commença à Naples l'illustre école des imitateurs et des continuateurs de l'ancienne Géométrie; les méthodes modernes ouvrirent de nouvelles voies à la résolution du problème, et la Géométrie nouvelle le ramena à des principes généraux applicables encore aux sections coniques; par la méthode des équipollences, la solution se présente immédiatement. Nous allons résoudre le problème sous cette forme générale :

Inscrire dans un cercle un polygone XYZ *dont les côtés passent par des points donnés ou aient des longueurs données.*

Prenons le cas particulier où dans le cercle de centre O

Fig. 1.



on doit inscrire un quadrilatère XYZT, dont trois côtés XY, YZ, ZT passent respectivement par les points

A, B, C, et dont le quatrième côté TX ait une longueur donnée. Soit OH le rayon d'inclinaison nulle, et posons

$$\mathrm{OX} = \varepsilon^x.\mathrm{OH},\quad \mathrm{OY} = \varepsilon^y.\mathrm{OH},\quad \mathrm{OZ} = \varepsilon^z.\mathrm{OH},\quad \mathrm{OT} = \varepsilon^t.\mathrm{OH}\ (*);$$

AXY devant être une ligne droite, cette condition est exprimée par l'équipollence

$$\varepsilon^x.\mathrm{OH} - \mathrm{OA} = n(\varepsilon^y.\mathrm{OH} - \mathrm{OA});$$

entre cette équipollence et sa conjuguée, nous éliminerons n et nous aurons

$$(\varepsilon^x.\mathrm{OH} - \mathrm{OA})(\varepsilon^{-y}.\mathrm{OH} - \mathrm{cj.OA})$$
$$= (\varepsilon^{-x}.\mathrm{OH} - \mathrm{cj.OA})(\varepsilon^y.\mathrm{OH} - \mathrm{OA}).$$

Cette équipollence, il était du reste facile de le prévoir, devient identique pour $x = y$, on peut donc la diviser par $\varepsilon^x - \varepsilon^y$; après quoi nous aurons entre les inclinaisons x et y la relation

(1) $$\varepsilon^x = \frac{\mathrm{OA} - \varepsilon^y.\mathrm{OH}}{\mathrm{OH} - \varepsilon^y.\mathrm{cj.OA}}.$$

Les côtés YZ, ZT passant par les points B, C donnent les relations analogues

(2) $$\varepsilon^y = \frac{\mathrm{OB} - \varepsilon^z.\mathrm{OH}}{\mathrm{OH} - \varepsilon^z.\mathrm{cj.OB}},$$

(3) $$\varepsilon^z = \frac{\mathrm{OC} - \varepsilon^t.\mathrm{OH}}{\mathrm{OH} - \varepsilon^t.\mathrm{cj.OC}};$$

enfin, en appelant δ l'arc donné TX, on aura

(4) $$\varepsilon^t = \varepsilon^{x-\delta}.$$

Portant ces équipollences les unes dans les autres, nous obtiendrons l'équipollence trinôme qui nous apprendra

---

(*) $\varepsilon = e^{\sqrt{-1}} = e^i$. *(Note du Rédacteur.)*

à déterminer l'inclinaison inconnue x et par conséquent la position du sommet X. Nous allons construire à mesure les coefficients des équipollences successives, et on continuerait de la sorte si le polygone avait un plus grand nombre de côtés. La valeur (2) substituée dans (1) donne ε^x exprimée par une équipollence, qui, en posant

(5) $$AA_1 \doteq -OB, \quad HH_1 \doteq -\frac{OA.cj.OB}{OH},$$

se réduit facilement à

$$\varepsilon^x \doteq \frac{OA_1 + \varepsilon^z.OH_1}{cj.OH_1 + \varepsilon^z cj.OA},$$

et en substituant (3) dans cette dernière, on obtient

$$\varepsilon^x \doteq \frac{OA_2 - \varepsilon^t.OH_2}{cj.OH_2 - \varepsilon^t cj.OA_2},$$

pourvu qu'on ait eu le soin de poser

(6) $$A_1A_2 \doteq \frac{OH_1.OC}{OH}, \quad H_1H_2 \doteq \frac{OA.cj.OC}{OH}:$$

enfin en substituant (4) on obtient

$$\varepsilon^{2x-\delta}.cj.OA_2 - \varepsilon^x.cj.OH_2 - \varepsilon^{x-\delta}.OH_2 + OA_2 \doteq o,$$

qui devient

$$\varepsilon^x.OH + \varepsilon^{\delta-x}.OH.\frac{OA_2}{cj.OA_2} \doteq OU,$$

en posant

(7) $$OW \doteq OH_2 + \varepsilon^\delta.cj.OH_2, \quad OU \doteq \frac{OH.OW}{cj.OA_2}.$$

La dernière, comparée à l'équipollence identique

$$OX + XU \doteq OU,$$

nous montre que le point X s'obtiendra en coupant le cercle donné par un autre cercle égal ayant son centre en U. Les équipollences (5), (6), (7) indiquent clairement les constructions à effectuer. On tire AA_1 équipol-

lente à BO, on construit le triangle OAK inversement semblable à OHB, et on tire

$$HH_1 = KO;$$

on forme le triangle $OH_1 L_1$ directement semblable à OHC et $OA_1 K_1$ inversement semblable au même triangle OHC, et on tire

$$A_1 A_2 = OL_1, \quad H_1 H_2 = OK_1;$$

prenons ensuite la corde HI égale au côté donné TX, on mène OW perpendiculaire sur HI et ayant par conséquent une inclinaison égale à $\frac{1}{2}\delta$, et on coupe cette ligne, de sorte que $H_2 W$ égale $H_2 O$; enfin, construisant OWU inversement semblable à $OA_2 H$, la droite perpendiculaire sur le milieu de OU coupera le cercle donné au sommet demandé X. La direction du rayon OH est arbitraire; en prenant ce rayon sur la direction de OC, les triangles OHC, $OH_1 L_1$, $OA_1 K_1$ se réduisent à trois droites coupées dans de certains rapports.

Cette méthode a encore l'avantage d'indiquer les calculs qu'il faudrait effectuer pour déterminer numériquement la position du sommet X. Les deux solutions se réduisent à une seule quand OU est double du rayon du cercle, c'est-à-dire quand la direction de OW est telle, que la projection de OH_2 sur OW égale OA_2. Dans ce cas, le côté ZT est le plus grand entre tous ceux des quadrilatères inscrits dans le cercle et dont trois côtés passent par les points A, B, C.

II.

Circonscrire à un cercle un polygone dont les sommets soient situés sur des droites données ou aient des angles de grandeurs données.

Cherchons, avant de résoudre le problème, quelle est la condition pour que les perpendiculaires aux extrémités des droites OA′, OB′, OC′ se rencontrent en un même point M. Nous avons

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA'} + \mathrm{A'M} = (1 + li)\,\mathrm{OA'} = (1 + mi)\,\mathrm{OB'} = (1 + ni)\,\mathrm{OC'};$$

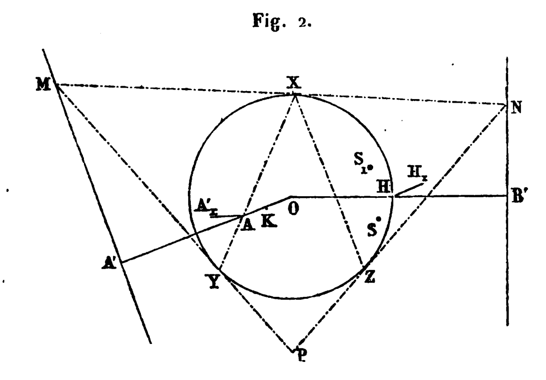
entre ces équipollences et leurs conjuguées, on élimine l, m, n et on trouve que la condition cherchée est exprimée par la fonction alternée ou déterminant

$$\begin{aligned}
&\mathrm{OA'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OA'}(\mathrm{OB'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OC'} - \mathrm{OC'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OB'})\\
+\,&\mathrm{OB'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OB'}(\mathrm{OC'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OA'} - \mathrm{OA'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OC'})\\
+\,&\mathrm{OC'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OC'}(\mathrm{OA'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OB'} - \mathrm{OB'}.\mathrm{cj}.\mathrm{OA'}) = 0.
\end{aligned}$$

Arrivons maintenant au problème qui est le corrélatif du précédent.

Supposons qu'on ait à circonscrire au cercle un triangle MNP ayant les sommets M et N sur deux droites données et l'angle en P donné.

Fig. 2.



Les droites seront convenablement définies au moyen des perpendiculaires OA′, OB′ abaissées du centre O du cercle donné, et les points de contact du triangle circon-

scrit sont exprimés par

$$OX = \varepsilon^x . OH,$$
$$OY = \varepsilon^y . OH,$$

OH étant le rayon pris pour origine des inclinaisons. Pour que les trois perpendiculaires élevées sur OA′, OX, OY se rencontrent au même point M, il faut qu'on ait, comme nous venons de le voir,

$$OA'.cj.OA'(\varepsilon^{x-y} - \varepsilon^{y+x})$$
$$+ OH(\varepsilon^y.cj.OA' - \varepsilon^{-y}.OA' + \varepsilon^{-x}.OA' - \varepsilon^x.OA') = o;$$

elle devient identique pour $x = y$; divisée par $\varepsilon^x - \varepsilon^y$, ensuite résolue, elle donne

$$\varepsilon^x = \frac{OH.OA' - \varepsilon^y.OA'.cj.OA'}{OA'.cj.OA' - \varepsilon^y.OH.cj.OA'},$$

qu'on rend identique à l'équipollence (1) du problème précédent, quand on y fait

$$OA = \frac{\overline{OH}^2}{cj.OA'}.$$

Ainsi la condition que les tangentes en X et en Y se rencontrent en un point de la droite A′M revient à la suivante : que la corde XY passe par le point A situé sur OA′ de telle sorte que OA.OA′ égale le carré du rayon, ou, en d'autres termes, que la corde XY passe par le pôle de A′M relativement au cercle O. Déterminant de la même manière le point B sur OB′, le problème sera ramené au précédent.

Si, par exemple, le triangle MNP circonscrit au cercle devait avoir deux sommets sur les droites A′M, B′N et l'angle en P *maximum*, nous déterminerions comme ci-dessus les pôles A, B des deux droites, et menant le rayon OBH, nous couperions OA en K dans le même

rapport que OH est coupé en B. Après quoi, nous tirerions

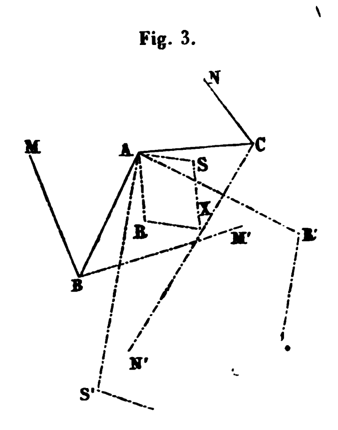
$$AA_1 = BO, \quad HH_1 = KO,$$

et, donnant à OS une direction telle, que la projection sur cette droite de OH_1 soit égale OA_1, nous formerions l'angle SOX égal à HOA_1. Il y a deux solutions de *maximum* dépendant des deux positions que peut prendre OS suivant OS et OS_1.

III.

Étant donnés trois points A, B, C, *trouver la base commune des trois triangles* AXY, BXY, CXY, *connaissant les différences de leurs angles au sommet* A, B, C

Fig. 3.



et aussi les rapports des quotients de leurs côtés $\frac{AX}{AY}$, $\frac{BX}{BY}$, $\frac{CX}{CY}$.

Lagrange, en cherchant (*Mémoires de l'Académie de Berlin pour* 1779, p. 201) les pôles d'une projection stéréographique, connaissant les projections de trois points

dont on donne les latitudes et les longitudes, se trouva amené au problème que nous venons d'énoncer, et dit : *Il me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie, et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée, parce qu'il me semble qu'elle ne serait d'aucun usage, à moins qu'on ne pût la ramener ensuite à une construction aisée.*

La méthode des équipollences en offre une solution tout à fait directe et très-simple.

Les conditions du problème sont exprimées par les deux équipollences

$$\frac{AX.BY}{AY.BX}=\frac{CN}{CA},$$

$$\frac{AX.CY}{AY.CX}=\frac{BM}{BA},$$

pourvu qu'on ait

$$\text{ang}\,ACN=\text{ang}\,YAX-\text{ang}\,YBX$$

et que le rapport $\frac{CN}{CA}$ égale le quotient donné de $\frac{AX}{AY}$ par $\frac{BX}{BY}$. On en dirait de même de BM. Par le premier principe toutes les droites inconnues se réduisent aux deux AO, AY, et il est ensuite facile d'éliminer cette dernière et d'obtenir la solution

$$AX=\frac{AC.MB+AB.CN}{MN}=AR+AS,$$

en faisant

$$\frac{AC.MB}{MN}=AR,\quad \frac{AB.CN}{MN}=AS.$$

On construira donc les triangles ACR, ABS directement semblables à MNB, NMC, et on aura

$$SX=AR$$

On pourra de la même manière déterminer Y; il faudra pour cela substituer aux rapports $\frac{CN}{CA}$, $\frac{BM}{BA}$ leurs équipollents $\frac{CA}{CN'}$, $\frac{BA}{BM'}$, pour pouvoir éliminer X avec la même facilité que Y. On trouvera ainsi

$$AY = AR' + AS',$$

AR′ et AS′ étant donnés par

$$AR' = \frac{AC.M'B}{M'N'}, \quad AS' = \frac{AB.N'C}{N'M'},$$

qui donnent

$$AR.AR' = AS.AS'.$$

IV.

Question 874.

On donne un cercle et deux points. Inscrire dans le cercle un triangle isoscèle dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés. (Lemoine.)

C'est là le vieux problème du billard circulaire déjà résolu par l'Arabe Abhasen et par d'autres géomètres, principalement par Simpson (*Sect. conicarum, libri V : Appendix*, p. 223), Chasles (*Aperçu historique*...); dans les *Institut. analyticæ* de Riccati et Saladini, on en donne la solution au moyen d'une hyperbole équilatère; *voyez* aussi Paoli, Bigoni, Puissant, Quetelet, etc.

Si X est le point d'incidence, c'est-à-dire le sommet du triangle isoscèle, le rayon $OX = r\,i^x$ devant être également incliné sur les droites

$$AX = ri^x - OA, \quad BX = ri^x - OB,$$

nous aurons l'équipollence

$$r^2 i^{2x} = m(ri^x - OA)(ri^x - OB).$$

Au moyen de sa conjuguée

$$r^2 i^{-2x} = m(ri^{-x} - \text{cj.OA})(ri^{-x} - \text{cj.OB}),$$

on élimine m, et en posant

$$\text{OA} + \text{OB} = \text{OS},$$

on obtient

$$(1)\quad \text{cj.OA.cj.OB}\,i^{4x} - r.\text{cj.OS}.i^{3x} + r.\text{OS}.i^{x} - \text{OA.OB} = 0;$$

le problème étant du quatrième degré ne peut se résoudre géométriquement.

Si un côté du triangle isoscèle inscrit dans le cercle devait passer par le point P et l'autre avoir une inclinaison nulle, nous arriverions de la même manière à l'équipollence

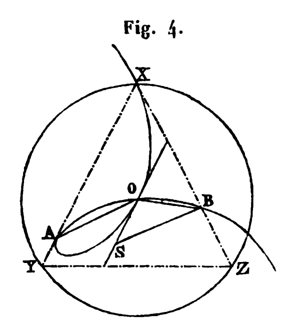
$$(2)\qquad \text{cj.OP}.i^{4x} - r.i^{3x} + ri^{x} - \text{OP} = 0,$$

qui est identique à l'équipollence (1) quand OS est la droite d'inclinaison nulle, et qu'on a

$$\text{OP} = \frac{\text{OA.OB}}{\text{OS}}.$$

Nous mènerons donc AS équipollente à OB, puis nous construirons le triangle OBP directement semblable

Fig. 4.



à OSA, le problème se réduira à trouver sur le cercle donné le point X, tel que, en le joignant à P, la droite PX

soit coupée par OS en L, de façon à ce que le triangle OLX soit isoscèle; les solutions du problème sont les intersections du cercle avec la courbe que nous construirons de la manière suivante. Sur chaque droite PMLX menée par le point P, on prend de part et d'autre de son point de rencontre L avec OS, les distances LM, LX égales à LO, et la courbe XOPMAOB ainsi construite coupera le cercle de centre O, en deux ou quatre points qui seront les points cherchés.

La courbe est du genre des courbes à boucle. Dans le cas particulier où OP serait perpendiculaire à OS, la courbe est l'inverse de l'hyperbole équilatère relativement à son sommet, elle est dite encore *folium, strophoïde logocyclique*.

En appelant $2x$ l'inclinaison de PM sur OS, l'équipollence de la courbe est

$$\text{PM} = (\tan x + c)\,\varepsilon^{2x},$$

en posant

$$\text{PO} = i + c.$$

Le point C de la courbe correspondant à $x = 0$ est donné par la relation

$$\text{PC} = c;$$

PH rencontre encore la courbe en deux points D, D' donnés par

$$\text{PD} = (1 \pm c)\,i,$$

et ainsi l'angle DOD' est égal à 90 degrés. L'asymptote passe par le point K qu'on obtient en prenant

$$\text{PK} = 2\,\text{PH}$$

et est parallèle à OS. Comme

$$\text{OA}.\text{OB} = \text{OP}.\text{OS},$$

si l'on prend arbitrairement sur OHS un point R et qu'on fasse

$$OQ = 2\,OP,$$

la droite $RA = \sqrt{RO.RQ}$, bissectrice de l'angle ORQ et moyenne proportionnelle entre RO et RQ, détermine sur la courbe deux points A et B, $RB = -RA$, pour lesquels on a

$$\text{ang}\,AMO = \text{ang}\,OMB,$$

quel que soit le point M de la courbe.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 584 (*)

(voir 1re série, t. XX, p. 150);

PAR M. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée royal de Bruges (Belgique).

Une conique étant inscrite dans un triangle, soient respectivement α, β, γ les rayons de courbure de la conique aux points où elle touche les côtés a, b, c du triangle, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 8S = &\left(-\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}+\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}+\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}-\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}+\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\\ &\times\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}+\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}-\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right),\end{aligned}\right.$$

S *désignant l'aire du triangle.* (FAURE.)

(*) M. Mention a donné dans les *Nouvelles Annales,* t. XX, p. 302, une solution de la même question, où il dit : « Je ne sais pas comment en dehors du procédé de relations métriques qui a manifestement conduit l'auteur à ce théorème, on éviterait d'inextricables calculs, sans le cercle focal. »

I. — Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des sommets du triangle ABC circonscrit à l'ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$. En appelant $2S_1$, $2S_2$, $2S_3$ les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

on aura

$$(2) \quad A^2B^2 = \frac{1}{S}(-S_1 + S_2 + S_3)(S_1 - S_2 + S_3)(S_1 + S_2 - S_3) \text{ (*)}.$$

D'un autre côté, si x', y' sont les coordonnées du point de contact de la droite AB, celle-ci pourra être représentée par l'une ou l'autre des équations

$$\frac{xx'}{A^2} + \frac{yy'}{B^2} - 1 = 0,$$

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + 2S_3 = 0,$$

d'où, en identifiant,

$$\frac{x'}{A^2} = -\frac{y_1 - y_2}{2S_3}, \quad \frac{y'}{B^2} = \frac{x_1 - x_2}{2S_3}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression du rayon de courbure γ mise sous la forme

$$\gamma = A^2B^2\left(\frac{x'^2}{A^4} + \frac{y'^2}{B^4}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et nous aurons

$$\gamma = \frac{A^2B^2c^3}{8S_3^3}, \quad \text{d'où} \quad S_3 = (AB)^{\frac{2}{3}}\frac{c}{2\gamma^{\frac{1}{3}}},$$

(*) Voir 2e série, t. V, p. 514.

et par analogie on conclut

$$(3) \qquad S_1 = (AB)^{\frac{2}{3}} \frac{a}{2\alpha^{\frac{1}{3}}}, \quad S_2 = (AB)^{\frac{2}{3}} \frac{b}{2\beta^{\frac{1}{3}}}.$$

En remplaçant S_1, S_2, S_3 par ces valeurs dans les égalités (2) et $S = S_1 + S_2 + S_3$, on aura la formule (1) de M. Faure et la suivante :

$$(4) \qquad 2S = (AB)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}} \right).$$

Il convient de faire une remarque *essentielle* relativement aux formules (1) et (4). Les quantités S_1, S_2, S_3 représentent, aux signes près, les surfaces des triangles OBC, OCA, OAB.

Si la conique touche les côtés intérieurement, on a

$$ABC = OBC + OCA + OAB,$$

et en comparant à l'égalité $S = S_1 + S_2 + S_3$, on voit que S_1, S_2, S_3 sont positifs. Mais si la courbe touche, par exemple, le côté AB intérieurement et les deux autres extérieurement, comme on a alors

$$ABC = OBC + OCA - OAB,$$

il faut considérer S_1 et S_2 comme positifs et S_3 comme négatif et partant, dans les formules (3), α et β comme positifs et γ comme négatif, afin que les deux membres de ces formules soient de même signe. On en conclut que les relations (1) et (4) sont celles qui conviennent à une ellipse tangente intérieurement au triangle ABC, et pour les appliquer aux ellipses ex-inscrites, il y faut changer le signe de celui des trois quotients $\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}$ qui correspond au côté touché intérieurement.

On voit sans peine comment les calculs précédents peu-

vent s'appliquer aux hyperboles tangentes aux trois côtés du triangle ABC.

II. — Les égalités (1) et (4) peuvent encore se démontrer très-élégamment dans le cas de l'ellipse, en la projetant suivant un cercle qui a pour rayon le demi-petit axe B. Le triangle ABC se projette alors suivant un triangle MNP circonscrit au cercle. En supposant les trois contacts intérieurs et en appelant S' la surface de MNP, on aura

$$16S'^2 = (m+n+p)(-m+n+p)(m-n+p)(m+n-p),$$

$$(5) \qquad 2S' = (m+n+p)B,$$

et en divisant la première équation par la deuxième

$$(6) \qquad 8S' = \frac{1}{B}(-m+n+p)(m-n+p)(m+n-p).$$

Soient $2a'$, $2b'$, $2c'$ les longueurs des diamètres de l'ellipse parallèle aux côtés a, b, c et qui se projettent suivant des diamètres du cercle. Comme des droites parallèles sont proportionnelles à leurs projections sur un même plan, on aura

$$\frac{a}{a'} = \frac{m}{B}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{n}{B}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{p}{B}.$$

Mais on a aussi

$$\alpha = \frac{a'^3}{AB}, \quad \beta = \frac{b'^3}{AB}, \quad \gamma = \frac{c'^3}{AB};$$

d'où

$$m = \frac{aB}{a'} = \frac{aB}{\alpha^{\frac{1}{3}}(AB)^{\frac{1}{3}}},$$

$$n = \frac{bB}{\beta^{\frac{1}{3}}(AB)^{\frac{1}{3}}},$$

$$p = \frac{cB}{\gamma^{\frac{1}{3}}(AB)^{\frac{1}{3}}}.$$

Les surfaces du triangle ABC et de l'ellipse étant proportionnelles à leurs projections, on a

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi AB}{\pi B^2} \quad \text{ou} \quad S' = \frac{BS}{A}.$$

Les valeurs de m, n, p, S', portées dans les formules (5) et (6), conduisent aux relations (4) et (1) (*).

III. — En supposant le triangle ABC circonscrit à la parabole $y^2 - 2px = 0$, on a

$$(7) \qquad p = \frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 - y_3)}{S}.$$

En identifiant les deux équations du côté AB

$$yy' - p(x + x') = 0,$$
$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + 2S_3 = 0,$$

il vient

$$y' = p\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}, \quad x' = \frac{2S_3}{y_1 - y_2},$$

et comme

$$\gamma = \frac{(p^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

on aura

$$\gamma = p\frac{[(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]^{\frac{3}{2}}}{(y_1 - y_2)^3} = \pm\frac{pc^3}{(y_1 - y_2)^3},$$

ou

$$y_1 - y_2 = \pm p^{\frac{1}{3}}\frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}},$$

(*) Un raisonnement analogue peut servir à démontrer le théorème de Mac-Cullagh. Voir *Nouvelles Annales*, 1re série, t. IX, p. 298.

et de même

$$y_2 - y_3 = \pm p^{\frac{1}{3}} \frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}},$$

$$y_3 - y_1 = \pm p^{\frac{1}{3}} \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}}.$$

La somme $(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + (y_3 - y_1)$ étant nulle, on peut considérer deux de ces binômes comme positifs, et le troisième comme négatif, ce qui donne,

$$(8) \qquad \frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}},$$

et l'on a de plus, en vertu de l'égalité (7),

$$(9) \qquad S = \frac{abc}{\alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}}},$$

ou, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC,

$$4R = \alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}}.$$

On peut aussi vérifier facilement qu'on a encore la formule

$$8S = \left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} - \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Car, en vertu de l'équation (8), les trois facteurs du second membre se réduisent à $\frac{2a}{\alpha^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{2c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{2b}{\beta^{\frac{1}{3}}}$, et leur produit sera $\frac{8abc}{\alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}}}$ ou, en vertu de la relation (9), 8S.

Question 965

(voir 2e série, t. VIII, p. 560);

PAR M. C. CHADU,
Maître auxiliaire au lycée de Bordeaux.

Étant donnés deux points fixes A *et* B *situés sur une ellipse, si l'on joint un point quelconque* M *de cette courbe aux deux points fixes, les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes* MA *et* MB *interceptent sur chacun des axes un segment dont la longueur est constante, quelle que soit la position du point sur la courbe.* (LAGUERRE.)

Menons les normales aux trois points A, B, M; soient α, β, μ les points de rencontre de ces normales avec le grand axe (*).

D'après une proposition démontrée, la perpendiculaire Pp élevée sur le milieu de MB passe par le milieu p de MB; de même la perpendiculaire Qq élevée sur le milieu de AM passe par le milieu q de $\mu\alpha$.

Nous aurons donc

$$pq = \frac{\mu\alpha + \mu\beta}{2} = \frac{\alpha\beta}{2},$$

quantité constante quel que soit le point M, puisque les deux points A et B sont fixes.

Note I. — M. Chadu, qui déduit la solution précédente de la question 955, nous fait remarquer qu'on pourrait, de la question 956, déduire pour l'ellipsoïde un théorème analogue au précédent.

Note II. — La question 955 a été résolue aussi par MM. Cerruti Valentino, étudiant à Turin; Humbert,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

élève au lycée de Metz; Émile Laclais et Alphonse Fould;

M. Cerruti fait observer que les longueurs constantes interceptées sur les axes sont représentées par

$$\frac{1}{2}e^2(x'-x''), \quad \frac{1}{2}e'^2(y'-y''),$$

e et e' étant les excentricités réelle et imaginaire de la courbe;

M. Humbert étend le théorème à l'hyperbole;

M. Laclais fait remarquer que la propriété considérée est caractéristique des courbes du second degré;

Enfin, d'après M. Fould, la proposition ne s'étend pas à un ellipsoïde quelconque; mais on a, pour l'ellipsoïde de révolution, le théorème suivant :

« Si l'on prend, sur un ellipsoïde de révolution, deux points fixes A et B et un point variable M, les plans perpendiculaires aux milieux des droites MA, MB interceptent sur l'axe de révolution un segment de longueur constante. »

QUESTIONS.

---

984. 1° Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux points homographiques des quatre points considérés situés sur des ellipses ayant même grand axe que la première.

2° Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux quatre points conjugués. De plus, les deux triangles formés par les diagonales des deux quadrilatères circonscrits à l'ellipse aux pieds de deux groupes de normales ont même surface.

3° Considérons deux quadrilatères inscrit et circonscrit. Les normales aux quatre points, sommets du premier et points de contact du second, sont concourantes. La diagonale du quadrilatère circonscrit est conjuguée de la symétrique par rapport à l'un des axes de l'ellipse de la droite joignant les milieux des côtés du quadrilatère inscrit, qui sont les polaires des extrémités de la diagonale considérée. (A. SARTIAUX.)

985. Soit K la courbe d'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère ayant pour centre un point d'un plan de symétrie de la surface; désignons par C la projection orthogonale de K sur ce plan de symétrie et par C′ le lieu des points où ce même plan est coupé par les normales élevées aux différents points de K; C et C′ sont deux coniques ayant leurs axes parallèles, et si l'on désigne respectivement par a^2 et a'^2, b^2 et b'^2 les carrés des axes parallèles, on a la relation

$$a^2 a'^2 = b^2 b'^2.$$

(LAGUERRE.)

986. Étant donnés, sur une ellipse de Cassini dont les foyers sont f et g, deux points a et b, désignons par α et β les points où les normales en en a et b coupent l'axe de la courbe qui renferme les foyers, et par i le point où cet axe est coupé par la perpendiculaire élevée sur le milieu du segment ab; démontrer la relation

$$\frac{1}{ia} + \frac{1}{ib} = \frac{1}{if} + \frac{1}{ig}.$$

(LAGUERRE.)

987. Trouver la somme de la série

$$\cos^3\varphi - \frac{1}{3}\cos^3 3\varphi + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2\varphi - \frac{1}{3^3}\cos^3 3^3\varphi + \ldots.$$

(LAISANT.)

BIBLIOGRAPHIE.

Notice sur Platon de Tivoli, traducteur du XIIe siècle ;

PAR M. L. BÉZIAT.

Parmi ceux qui, dans le XIIe siècle, ont le plus contribué à faire refleurir en Europe les sciences mathématiques en traduisant en langue latine d'importants ouvrages relatifs à ces sciences, on doit placer Platon de Tivoli. Libri écrit : « Platon de Tivoli et Gérard de Crémone sont les plus célèbres parmi les traducteurs italiens du XIIe siècle. On doit à Gérard la première version de l'*Almageste*, et à Platon de Tivoli la connaissance de plusieurs ouvrages de géométrie. »

I. Platon de Tivoli traduisit de l'arabe en latin un Traité d'astronomie d'Albategni, célèbre astronome arabe. Guillaume d'Auvergne, évêque de Paris, qui, comme le prouve Dausson dans son *Histoire littéraire de la France*, mourut le 30 mars 1249, cite cette traduction : « Ne croyez pas au moins, dit-il, que ce Macomet (Macometum) soit le célèbre philosophe que l'on a appelé Albategin (*sic*), et dont un ouvrage sur l'astronomie a été traduit de l'arabe en latin par Platon de Tivoli ; la noblesse et la profondeur philosophique qui règnent dans ses écrits montrent bien qu'il n'a eu que le nom de commun avec cet homme que je n'appellerai pas grossier, mais qui est, comme l'a dit quelqu'un, avec beaucoup de vérité, digne d'habiter avec les porcs et les vaches (*vaccino ac porcino*). Loin de nous la pensée qu'un

tel philosophe fût aussi fou et eût des sentiments aussi vils. »

Cette traduction fut imprimée à Nuremberg en 1537, avec une autre traduction latine faite par Jean de Séville des Éléments d'astronomie d'Al-Fergani, autre astronome arabe.

Sur le frontispice du volume on lit ce qui suit :

« Sont contenus dans ce livre : les Éléments d'astronomie d'Alfragran (Alfragrani) ; un ouvrage de l'habile astronome Albategnius, sur le mouvement des étoiles, d'après ses observations personnelles et d'après celles de Ptolémée, le tout avec des démonstrations géométriques et des additions par Jean de Konigsberg (Regiomonte). De plus un discours d'introduction à toutes les sciences mathématiques, prononcé par le même Jean de Konigsberg dans une lecture publique sur Alfragran. Du même, utile introduction aux Éléments d'Euclide. Dédicace de Philippe Mélanchthon au sénat de Nuremberg. Toutes publications récentes. » Norimbergæ. Anno M. D. XXXVII.

Jean de Konigsberg est le célèbre astronome du XV[e] siècle (Regiomontanus), dont le vrai nom était J. Muller ; né à Unsind près de Konigsberg, on lui donna le nom de *Regiomontanus ;* Konigsberg signifiant Mont-Royal, *Regius mons*. Ce recueil est un volume de 126 feuilles ; il commence d'abord par la dédicace de Mélanchthon au sénat de Nuremberg, avec la date suivante : Mense Augusti. Anno 1537 ; vient ensuite le discours de Regiomontanus avec cette mention de Platon de Tivoli : « Testes ostendunt dignissimi Albategnius quem latinum fecit Plato quidam Tiburtinus ». Sous ce titre : *Brevis ac perutilis compilatio Alfragrani Astronomorum peritissimi totum id continens quod ad rudimenta astronomica est opportunum,* on trouve en 25 feuilles le Traité d'Alfragran, qui se termine par ces paroles : « Explicit

Alfragranus. Norimbergæ apud Joh. Petreium anno salutis 1537. » Nous trouvons enfin, après une « Præfatio Platonis Tiburtini in Albategnium, » ce Traité d'Albategni, intitulé : *In nomine Domini incipit liber Machometi filii Gebir filii Crueni qui vocatur Albategni in numeris stellarum et in locis motuū earū experimenti ratione conceptorum in quo LVII capitula continuantur.*

Kastner et Scheibel décrivent cette édition dont on trouve un exemplaire à la bibliothèque *Angelica* de Rome.

Cette traduction fut réimprimée à Bologne en 1645, et Brunet fait observer que cette édition est très-rare.

Au recto de la première feuille on ne trouve que ces paroles : « Albategnius de numeris Stellarum » ; au recto de la seconde on lit : « Mahometis Albatenii de scientiâ stellarum liber cum aliquot additionibus Joannis Regiomontani, ex Bibliotheca Vaticana transcriptus. » La troisième contient une épître dédicatoire adressée : « Ad serenissimum Ferdinandum II, Ducem Hetruriæ Magnum », c'est-à-dire à sa Sérénissime Altesse Ferdinand II, grand-duc de Toscane. Cette épître porte la souscription suivante : « Serenissimæ Celsitudinis tuæ Humillimus servus Bernardus Vgulotus. » A la quatrième feuille on trouve une préface intitulée : « *Præfatio ad Lectorem* ». Elle commence ainsi :

« Ami lecteur, nous te livrons Albategnius tel que nous l'avons transcrit de la bibliothèque du Vatican, sur l'invitation de Lucas Valerius, mathématicien distingué, et autrefois professeur public à Rome, c'est-à-dire privé de planches et de figures, et traduit de l'arabe en latin dans un style à demi barbare par Platon de Tivoli. Une considération qui peut toutefois servir à l'excuse de ce Platon, c'est que l'ouvrage d'Albategnius est écrit d'après le goût arabe et avec concision, surtout quand on le rap-

proche de l'Almageste si prolixe de Ptolémée, et que fort souvent l'auteur a omis des démonstrations géométriques, parce qu'il n'écrivait pas pour des commençants, mais pour des astronomes déjà exercés. »

Après la préface primitive du traducteur et la table des 57 chapitres de l'ouvrage, vient l'ouvrage lui-même, occupant 228 pages. L'avant-dernière feuille contient l'« *Errata corrigé* » ; au recto de la dernière on trouve l'approbation de l'ouvrage, et derrière on lit : « Bononiæ M.DC.XLV. Typis Hœredis Victorij Benatij Superiorum permissu. » Tout le volume se compose de 124 feuilles in-4°.

Le célèbre astronome anglais, Edmund Halley, dans son opuscule intitulé : *Emendationes ac Notæ in vetustas Albatenii observationes cum restitutione Tabularum Lunisolarium ejusdem Authoris*, mémoire inséré dans les *Philosophical Transactions*, t. XVII (1693), écrit ce qui suit : L'ouvrage qu'il (Albatenius) a écrit d'après les leçons de son père ne se trouve plus chez nous ; il y a quelques siècles, une traduction en a été faite en latin par un certain Plato Tiburtinus, qui ne connaissait pas suffisamment la langue arabe et encore moins l'astronomie, comme il ressort évidemment de sa traduction. J'ai vu deux éditions de cette même traduction, l'une imprimée à Nuremberg en 1537, l'autre à Bologne en 1645. Mais cette dernière textuellement copiée sur la première, en reproduit même les fautes d'impression, bien qu'on se vante de l'avoir tirée d'un manuscrit du Vatican. Quoi qu'il en soit, les deux éditions sont remplies de fautes surtout pour les nombres, et des tables astronomiques de l'auteur dont il est souvent parlé dans l'ouvrage on ne retrouve que des fragments.

Dans son *Histoire de l'Astronomie moderne depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'à l'époque de*

1730, Bailly donne quelques extraits de l'ouvrage d'Albategni.

Delambre, après avoir rapporté ce que dit Albategni dans le premier chapitre de son ouvrage de *Scientiâ Stellarum*, sur les motifs pour lesquels il avait composé cet ouvrage, ajoute : « Tels sont les motifs qui ont engagé Albategni à composer son livre ; c'est là ce qu'on entrevoit dans le latin barbare de Plato Tiburtinus, à qui nous avons l'obligation de ce livre précieux, dont l'original ne se trouve plus, à moins qu'il n'existe à la Bibliothèque de l'Escurial. »

Dans les *Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug-Beg*, Sédillot confirme ces divers témoignages, fort défavorables à Platon.

II. Platon traduisit encore de l'arabe en latin un ouvrage en trois livres, intitulé : *Spherici*, et composé en langue grecque par Théodose de Tripoli, illustre géomètre de l'antiquité. Cette version fut imprimée à Venise en 1518. Jean de la Pène, mathématicien français du XVIe siècle, dans sa préface adressée au cardinal Charles de Lorraine, et imprimée avant le texte grec dans l'édition de Paris de 1558, écrit ce qui suit : Mais pour ce qui est de passer en revue toutes les propriétés des Sphériques, ce n'est ni utile ni nécessaire. Désirant les posséder, nos pères en ont fait une traduction latine, il y a quatre siècles. Mais il me semble qu'il est arrivé à ces traducteurs ce qui arrive souvent aux gens dévorés par une soif ardente, qui, ne pouvant la satisfaire avec de l'eau pure, boivent d'une eau fangeuse et fétide. Désirant vivement connaître la doctrine des Sphériques, et n'ayant pas entre leurs mains (comme je le pense du moins) le texte grec, ils ont eu recours aux versions arabes, et, au lieu de traduire Théodose qui avait écrit en grec sur

l'original même, ils l'ont pris à une source détournée ; ils ont même imprimé cette traduction, il y a quarante ans de cela, à Venise, traduction que l'auteur inconnu de l'opuscule intitulé : *de Speculis Ustoriis* affirme avoir été faite par Platon de Tibur. Si quelqu'un veut comparer avec le texte grec de Théodose la traduction faite sur l'arabe et imprimée à Venise, il y trouvera une incroyable différence, non-seulement de facilité, mais encore de brièveté. Théodose s'était contenté d'établir d'abord six ou sept définitions ; les Arabes en ont ajouté sept autres à peu près superflues. Théodose avait soigneusement évité d'employer un trop grand nombre de théorèmes, et il avait résumé en soixante propositions toute la doctrine des Sphériques ; les Arabes en ont ajouté une trentaine et en ont employé plus de quatre-vingts. Théodose avait démontré chaque théorème et n'avait négligé aucune partie de ses démonstrations ; mais les Arabes ont tellement écourté celles-ci, qu'ils ont omis une foule de remarques nécessaires. Enfin, pour tout dire en un mot, les Arabes ont tellement remanié cet ouvrage, qu'il en est devenu méconnaissable, et que ces théories sont devenues inintelligibles.

La préface dans laquelle on lit ces paroles n'a pas de date, mais elle a été imprimée en 1558 ; la traduction latine des Sphériques avait donc paru en 1518. — Le célèbre Jean-Albert Fabricius, en parlant des diverses traductions qu'on possède des Sphériques de Théodose, dit : « Latina ex Arabico interpretatio lucem vidit interprete Platone Tiburtino. Venet. 1518. Verum in hac versione definitiones et theoremata multiplicata sunt, demonstrationibus vicissim mutilatis ita ut aliud opus esse videatur. »

Scheibel et Lalande, dans leurs *Bibliographies astronomiques*, placent aussi cette édition en 1518.

Une traduction latine des Sphériques de Théodose se trouve insérée sans nom de traducteur, dans deux recueils de Traités sur la Sphère, imprimés tous deux à Venise en 1518, mais par des éditeurs différents ; l'un fut, en effet, publié par les héritiers d'Octaviames Scotus, l'autre par Lucas Antoine Giunti, typographe florentin. Le premier de ces recueils est un volume in-folio de 238 feuilles, portant au recto les nombres 2-180, 201-253. Sur le frontispice on lit le titre suivant :

SPHÆRA
Cum commentis in hoc volumine contentis, videlicet, etc.

On trouve d'abord une lettre avec la date suivante : « Patanio quarto Nonas Decembris : a natali christiano M.D.VII ». Le prologue de Cecco d'Ascoli à son commentaire sur le Traité de la Sphère de Sacrobosco, le texte latin de ce Traité même, puis le commentaire de Cecco d'Ascoli, le tout avec une grande figure représentant une sphère armillaire se suivent jusqu'à la feuille 23. On rencontre ensuite successivement un commentaire de Jean-Baptiste de Capoue de Manfredonia, chanoine régulier de l'ordre de Saint-Augustin, le commentaire de Jacob Lefèvre ou Le Fébure d'Etaples, le premier livre des *Sphériques* de Théodose, contenant 33 propositions, le second livre en contenant 31 ; un commentaire de Michel Scott sur le Traité de la Sphère de Sacrobosco, les *Questions du cardinal Pierre d'Ailly* sur ce même Traité, le troisième livre de Théodose renfermant quatorze propositions. Suivent encore d'autres Traités sur lesquels nous ne nous étendrons pas davantage.

Le second recueil est un volume in-folio de 235 feuilles ; les sixième et septième feuilles sont marquées, l'une 6, l'autre 6*b*. Ce recueil porte ce titre :

Sphera mundi noviter recognita cum commentariis et Authoribus in hoc volumine contentis.

Ce volume ressemble tout à fait à l'autre ; sur la dernière feuille on lit la note typographique suivante :

Venetiis impensis nobilis viri
domini Luce Antonij de Giunta
Florentini. Die
ultimo Ju-
nij 1518.

Dans la seconde colonne de cette même page on trouve une ode intitulée :

Joannis Baptiste Bracteoli In laudem Hieronymi
Nucerelli physici excellentis ac Medici
Ode Discolos Distrophos.

et au-dessous l'écusson de Giunti.

Un exemplaire de cette édition se trouve dans la bibliothèque Alexandrine ou de l'Université de Rome ; un autre dans la bibliothèque *Angelica*.

M. le prince don Balthazar Boncompagni possède un exemplaire de chacune de ces éditions ; il pria le professeur T. Orioli d'examiner ces deux recueils. Celui-ci, après les avoir soigneusement comparés, lui écrivit la lettre suivante :

« Je me suis empressé de vous obéir et j'ai parcouru les deux éditions différentes, imprimées toutes les deux à Venise en 1518, la première avec la date du 19 janvier, et avec le titre *Sphera cum commentis in hoc volumine contentis,* imprimée par les héritiers d'Octavianus Scotus ; la seconde avec la date du dernier juin, et avec ce titre : *Sphera mundi noviter recognita cum commen-*

tariis et authoribus in hoc volumine contentis, etc., imprimée par Luc-Antoine Giunti. Le résultat de mon examen est la pensée que la seconde n'est qu'une contrefaçon de la première.

» Cette dernière avait été imprimée sans le privilége que les éditeurs se procuraient d'ordinaire du gouvernement Vénitien. Giunti se crut donc autorisé à la réimprimer, probablement parce que cette compilation fut accueillie avec faveur par le public et fut tout à coup grandement recherchée. Avertis de cela, les héritiers de Scotus ajoutèrent à leur édition un cahier sans pagination après le *Registre*; ce cahier, composé de six feuilles, contient deux opuscules : l'un de Thebit, l'autre de Jean de Crémone; c'est la *Theorica Planetarum*. Alors Giunti enleva dans sa réimpression les cinq premières feuilles, et les réimprima de nouveau, mais plus étroitement, en supprimant tous les vides; il fut obligé d'en ajouter une sixième pour y faire entrer la matière du supplément de Scotus. Cette substitution ne put néanmoins s'opérer sans qu'il en résultât un peu de désordre. En effet, les feuilles à ajouter au reste de l'ouvrage n'étant plus au nombre de 5, mais de 6, marquées comme les autres au recto, on dut se contenter de placer l'une à la suite de l'autre deux feuilles marquées 6 et 6*b*. Mais le nouvel éditeur eut beau s'ingénier pour se créer de l'espace, force lui fut d'omettre l'opuscule de Thebit, et, qui pis est, il fallut qu'il plaçât la théorie de Jean de Crémone après le prologue de l'opuscule de Cecco d'Ascoli, en rejetant le travail de celui-ci après l'ouvrage du Crémonais.

» Du reste, cette réimpression fut faite avec une si grande précipitation qu'elle reproduit quelques erreurs du premier éditeur. Par exemple, à la feuille 149, recto, on lit dans les deux, en haut et au milieu de la page, « de

Sphera », tandis qu'on devrait y lire : « planetarum ». En général, les pages sont copiées l'une sur l'autre, sauf quelques petites différences, telles que la suivante : feuille 2, recto, Scotus écrit « Esculani », et Giunti « Euscu-lani », etc., etc.

» .... Il est sûr qu'un second examen fait avec plus de soin peut fournir des lumières plus grandes encore. En vous priant d'excuser cet écrit fait *currente calamo*, j'ai l'honneur d'être, etc.

» Rome, 4 avril 1851. »

III. Platon de Tivoli traduisit encore un petit ouvrage d'astrologie d'Almansor ou Almion, célèbre philosophe arabe. Cette traduction fut imprimée à Venise, sans date d'année, avec une traduction latine faite par Etienne de Messine d'un autre opuscule d'astronomie attribué à Hermès ou à Mercure Trismégiste. Fossi croit que cette édition, composée de six feuilles in-folio et excessivement rare, remonte à l'année 1492, parce que la dédicace de ce même ouvrage porte la date du 13 juin 1492 ; il en existe un exemplaire à la bibliothèque *Magliabecchiana* de Florence. La traduction de cet ouvrage d'Almansor fut encore insérée dans un recueil d'écrits d'astrologie dont on a deux éditions, toutes les deux de Venise, l'une de 1493 imprimée par Octavianus Scotus, l'autre de 1519 et des héritiers de Scotus. La première est un volume in-folio de 154 feuilles ; on y trouve une lettre de Dominique-Marie Novare, célèbre astronome du XV[e] siècle, à Jérôme Salio de Faënza. Le prince Boncompagni possède un exemplaire de cette édition ; il en existe deux autres dans les bibliothèques *Barberiniana* de Rome, et *Magliabecchiana* de Florence. La seconde est un volume in-folio de 144 feuilles, et ne diffère guère de la première ; la bibliothèque *Chigiona* en possède un exem-

plaire. Cette traduction fut encore imprimée à Venise, en 1501, par J.-B. Sessa, avec le *Liber Nativitatum d'Albubather,* astrologue du XIIIe siècle, et le *Centiloquium divi Hermetis.* A la fin du volume on trouve l'écusson de l'imprimeur avec les initiales de son nom *J. B. S.* et cette note :

Impressum Venetiis per Io
Baptista Cessa, anno do
mini 1501. *Die* 23
Februarij.

IV. Platon traduisit encore un Traité de géométrie composé en langue hébraïque par Savosorda ou Savasorda, mathématicien hébreu. La Bibliothèque impériale de Paris possède deux exemplaires manuscrits de cette traduction ; un d'eux est dans le volume marqué « Ancien Fonds. ms. Latins, n° 7224 », il s'étend du recto de la feuille 1 au verso de la feuille 62 ; l'autre est dans le volume marqué « supplément Latin, n° 774 », de la feuille 1 à la feuille 35. Voici ce que dit Libri de ce dernier :

« Le manuscrit de la Bibliothèque royale contient aussi de l'algèbre ; malheureusement, il est incomplet, et on ne peut pas juger de l'importance des recherches algébriques qu'il devait contenir. Ce manuscrit semble être du XIIIe siècle ; les chiffres y ont déjà une valeur de position ; il commence par ces mots : Incipit liber embadorum a, Savosorda in Ebraïco compositus et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus, anno Arabum DX mense Saphar. » Plus loin, on trouve : « Le manuscrit de Savosorda que j'avais cité d'abord est effectivement défectueux ; mais depuis, j'en ai découvert un autre parfaitement complet, qui se trouve également à la Bibliothèque royale, et qui ne porte pas dans le catalogue le nom de Savosorda, parce que l'encre s'étant effacée en

beaucoup d'endroits on n'en pouvait pas lire facilement le titre; mais où cependant, quand on l'examine avec attention, on voit comme dans l'autre manuscrit : « Incipit... »; ce qui montre que cette traductiou a été faite en 1116 (*), et qu'elle précède par conséquent, comme je l'ai déjà dit, tous les écrits du même genre qu'on a cités jusqu'à présent, et où se trouvent des recherches sur l'algèbre. »

Bien que Libri n'indique pas le numéro du manuscrit où se trouve l'exemplaire complet, découvert par lui, du Traité de Savosorda, il y a toute apparence que c'est celui qui est marqué « Ancien fonds. ms. Lat. n° 7224 ». Ce manuscrit commence ainsi : « Incipit liber..., etc. »

« Celui qui veut connaître toutes les manières de mesurer et de partager doit connaître toutes les propositions d'arithmétique et de géométrie sur lesquelles se fondent les mesures et les divisions; quand il les connaîtra parfaitement, il sera très-habile et ne pourra jamais se tromper. »

Derrière la feuille 62 de ce manuscrit, on lit : « Finit liber embadorum a Sauosorda iudæo in ebraïco compositus et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus anno arabum DX mense saphar die xv ejusdem mensis hora tertia sole in xx gradu et xv minuto leonis luna XII gradu et xx minuto piscium saturno in VIII gradu et LVII minuto tauri. Iove in arietis XXVI gradu et LII minuto. Marte in libra XXVII. XV. Venus in libra II. XXVIII. Mercurio in leone VIIII. XLV. Capite in cancroti cauda in capricornumti. »

Le second manuscrit commence et finit de la même manière.

(*) Cette date est fort importante et elle est certaine. On la retrouve aussi dans un manuscrit qui était autrefois dans la bibliothèque du couvent de Saint-Marc, à Florence, et que Montfaucon a cité.

Cette traduction se trouve encore manuscrite dans un volume de la bibliothèque *Magliabecchiana*, marqué « Scaffale 2, Palchetto VI, n° 36, nella stanza del sig. Bibliotecario »; elle s'étend de la feuille 23 à la feuille 40. Après ce que nous avons déjà rapporté du commencement de l'ouvrage, on y lit :

« Il convient donc de partager ce livre en quatre chapitres, dont le premier contienne les propositions générales de géométrie et d'arithmétique (*arithmetice*), qui ouvrent l'esprit du lecteur à la vraie connaissance des choses. Le suivant contiendra les moyens de mesurer les champs triangulaires, carrés, ronds, ou de forme quelconque. Le troisième apprendra à partager les figures qu'on a appris à mesurer dans le second chapitre ; le quatrième, à mesurer les fossés, puits et choses semblables, les tours mêmes et les édifices, et aussi les corps sphériques et les vases. Enfin, pour que rien ne soit omis de ce qui a rapport à cette science, nous indiquerons comment nous opérons mécaniquement et nous terminerons ainsi heureusement l'ouvrage. »

Chapitre Ier, contenant les propositions générales d'Arithmétique et de Géométrie.

« Le point est ce qui n'a aucune partie, » etc.

Dans ce manuscrit, qui renferme du reste plusieurs autres Traités, on ne trouve du Traité de Savosorda que le prologue déjà cité, les deux premiers chapitres et une partie du troisième. Ce manuscrit était le n° 207 des volumes de la bibliothèque du couvent des Dominicains de St-Marc de Florence ; c'est de cette bibliothèque qu'il est passé dans la *Magliabecchiana*. L'abbé Thomas Gelli, bibliothécaire de cette dernière, croit que ce changement s'est opéré entre 1809 et 1811. Dans le manuscrit 184 du couvent de Saint-Marc se trouve encore ce Traité.

On y lit sur la couverture : « Hic liber est conventus sancti marci de Florentia ordinis predicatorum quem donavit vir clarissimus cosmus medices prescripto conventui : emit autem ab heredibus phylippi secugolini pieruzzi de vertine notarii florentini. »

Le P. Fr. Ant.-Zaccaria, de la compagnie de Jésus, en énumérant, dans son *Iter litterarium per Italiam*, les manuscrits de mathématiques appartenant à ce couvent de Saint-Marc, dit du n° 207 : « Ajoutez à cela un manuscrit en parchemin, in-4°, dans lequel, outre deux Traités sur les poids, composés, l'un par maître Blaise de Parme pendant le temps des grandes vacances, l'autre par Jourdan, on trouve un ouvrage portant le titre : *Incipit*, etc. Il se compose de trois chapitres. Le premier contient les propositions universelles de géométrie et d'arithmétique; le second traite des dimensions des champs ; le troisième, des divisions des terres et des maisons entre des associés ou des cohéritiers. »

Léonard Fibonacci, mathématicien Pisan du XIIIe siècle, composa un ouvrage intitulé : *Practica Geometriæ*, et divisé en huit livres ou sections. J.-B. Guglielmini, mathématicien Bolonais, en parlant de cet ouvrage dans son Éloge de Léonard de Pise, lu par lui le 12 novembre 1813, dit ceci : « Ayant ainsi terminé la sixième section, avant d'entreprendre la septième, il introduisit dans son ouvrage un Traité abrégé de la manière grecque de mesurer les champs, plus expéditif et plus facile pour ce qui est du calcul, mais plus sujet à l'erreur dans la précision du résultat, et il termine ainsi l'épilogue : Ici finit l'ouvrage qui fut écrit en langue hébraïque par le juif Savasorda, et traduit en latin par Platon de Tibur en 1116. » Guglielmini, dans l'éloge que nous venons de mentionner, prétend posséder un manuscrit de la *Practica Geometriæ* de Léonard de Pise. Ce manuscrit, plu-

sieurs fois cité par Guglielmini dans ce même éloge, appartient maintenant à M. le comte Petronio Isolani de Bologne.

V. Platon de Tivoli traduisit ensuite un Traité d'Albuacasis, fils d'Asafar, sur la construction et les usages de l'astrolabe. Cette traduction se trouve en manuscrit dans le volume *Ottobonien* n° 309 de la bibliothèque du Vatican, de la feuille 136 à la feuille 143. Elle commence ainsi :

« Incipit liber Albuacasin in operibus astrolabii a Platone Tyburtino translatus ad amicum suum Joannem David. Suo serenissimo amico Joanni David in quatuor matheseos disciplinis peritissimo : Plato Tyburtinus : post carnis miseriam : carnis gloriam. »

« Parmi tous les instruments des savants, après une observation longue et assidue, je n'avais trouvé ni chez les Grecs, ni chez les Arabes, ni même chez les Latins, aucun mécanisme, aucun instrument aussi ingénieux et aussi utile que l'astrolabe (*astrolapsus*) inventé par Ptolémée et habilement construit par lui ; nulle part non plus chez les Latins je n'avais trouvé une théorie complète de cet instrument, pouvant expliquer toutes les ressources qu'il présente si heureusement ; après avoir parcouru beaucoup de volumes arabes et très-divers, je n'ai trouvé aucun Traité aussi parfait, aussi beau et aussi célèbre, ni aussi propre à montrer toutes les applications de l'instrument en astronomie et en géométrie que celui d'Albuacasis, fils d'Asafar, géomètre et astronome arabe distingué. On y trouve, en effet, non-seulement l'explication de chaque instrument et du nom qu'il porte, mais encore des vérifications de la position du soleil et d'autres astres, leurs déclinaisons en arcs de cercles et leurs ascensions, la latitude des pays ; la hauteur des tours et

des arbres, et une foule d'autres choses y sont déterminées d'une manière abrégée mais complète. J'ai donc pensé, mon cher ami Jean David, à traduire cet ouvrage en langue latine et à te l'offrir à toi, homme très-versé dans l'astronomie et en tout genre de science, et mon plus cher ami. Et toi, comme il convient à un ami, tu as accepté ce petit présent avec un grand plaisir, et, de peur de l'oublier jamais, tu l'as gravé dans le plus secret repli de ton cœur. Si j'ai laissé échapper quelque chose qui ne soit pas convenable, je laisse à ton sublime génie le soin de corriger Platon de Tibur. J'invoque aussi le Christ né du Saint-Esprit et de la vierge Marie. »

VI. Le *Quadripartitum* (*Tetrabiblon*) de Ptolémée fut encore traduit de l'arabe par Platon de Tivoli. Au recto de la feuille 61 du manuscrit « Ancien Fonds ms. lat. n° 7320 » de la Bibliothèque impériale, on lit :

« In nomine Domini misericordis et pii. Incipit liber IIII tractatuum Ptolemei Affaludhi in scientia judiciorum astrorum a Platone Tiburtino de Arabico in Latinum translatus. Tractatus primus in quo 74 capitula sunt. »

Cette traduction finit à la feuille 104 du même manuscrit par ces paroles : « Rebus igitur nativitatum generaliter explicatis hoc in loco huic libro finem imponere non incongruum existimavimus. » — Dans le catalogue des manuscrits de cette bibliothèque, cette traduction est ainsi indiquée : « Ptolemæi Quadripartitum : interprete Platone Tiburtino ; passim inter lineas glossæ, et ad marginem scholiæ. »

VII. Une autre traduction de Platon fut aussi celle d'un opuscule d'un certain Alkasem, sur les révolutions des nativités. Elle se trouve dans le manuscrit « Ancien Fonds. ms. lat. n° 7439 », et commence ainsi : « Alka-

sem de nativitatum revolutionibus. Dixit Alkasem filius Achasilh Cum nativitatum revolutiones per ascendens nativitatis scire volueris. Si secundum consilium azindi de India operatus fueris adde grad. et min. ascendentis nativitatis 83 grad. 12 min. 8 sec. »

VIII. Dans le *Catalogi librorum...*, on lit : « Excerpta ex libro Abohaly translato per Platonem Tiburtinum. » Ces *excerpta* se trouvent manuscrits dans le volume n° 57 Digby de la bibliothèque Bodleyenne d'Oxford.

IX. Dans une liste d'anciens médecins, donnée par Fabricius, dans sa *Bibliotheca Græca*, on trouve la phrase suivante : « Æneas qui a écrit en grec sur le pouls et les urines, et qui a été traduit en latin par Platon de Tivoli et Ponticus Virunius. » Plus loin, dans cette même liste, on lit : « Platon de Tivoli, qui a traduit les Jugements d'Almansor et l'ouvrage d'Æneas sur le pouls et les urines. »

Pour ne rien omettre de ce qui est relatif aux traductions de Platon de Tivoli, je crois devoir rapporter ici ce qu'ont dit sur les travaux de ce traducteur trois savants illustres : Pierre-Daniel Huet, né à Caen et évêque d'Avranches, qui a vécu dans le XVIIe siècle ; Montucla, du siècle dernier, et M. Chasles, du nôtre. Huet écrit donc dans son livre *De Claris interpretoribus :* « Plato Tiburtinus a traduit en latin Théodose de Tripoli sur une version arabe ; nous possédons la traduction, nous sommes privés de l'original. » — Montucla, en énumérant les mathématiciens du XIIe siècle, après avoir cité Adélard de Bath, Daniel de Morlay, Robert de Reading, Guillaume de Conchis, Clément Langtown et d'autres, ajoute : « Trois hommes de ce siècle, qui firent encore ce qui était en leur pouvoir pour faire connoître les auteurs anciens, termineront cette énumération. L'un est Platon de Ti-

voli, qui traduisit de l'arabe les Sphériques de Théodose vers l'an 1120; son latin est à la vérité presque barbare, mais tel était celui de son siècle. Cette traduction, infiniment rare, ne fut imprimée qu'en 1518. » M. Chasles, dans son *Aperçu Historique,* écrit cette phrase : « Trois autres hommes, contemporains d'Adhélard et de Gérard de Crémone, travaillèrent aussi à faire connaître les ouvrages mathématiques répandus chez les Arabes. Ce sont Platon de Tivoli (Plato Tiburtinus), le juif Jean de Séville, connu sous le nom de Joannes Hispalensis, et Rodolphe de Bruges (Brughensis).

» Le premier traduisit de l'arabe les Sphériques de Théodose, vers l'an 1120 (imprimé en 1518); de l'hébreu, un Traité de géométrie de Savosorda et divers ouvrages. »

Adrien Baillet, dans un article de ses *Jugements des savants sur les principaux ouvrages des auteurs*, intitulé *Platon de Tivoli ou Tiburtin*, cite deux traductions: celle des Sphériques de Théodose et celle de l'ouvrage d'astronomie d'Almansor.

Jourdain, dans son excellent ouvrage intitulé : *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote,* parle encore de notre héros. Dans la seconde édition de ce même ouvrage, on ne cite que deux traductions : celle du Traité d'Albategni et la traduction du Traité de géométrie de Savosorda.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. LAGUERRE (*).

DÉFINITION DES DROITES ISOTROPES ET DES OMBILICS. — COORDONNÉES ISOTROPES. — REPRÉSENTATION D'UN POINT IMAGINAIRE. — DISTANCE DE DEUX POINTS IMAGINAIRES.

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai toujours un plan *réel* et les figures tracées dans ce plan. Plus tard, en traitant de la Géométrie de l'espace, j'examinerai quelles modifications et quelles restrictions on doit apporter aux résultats obtenus, quand on veut les appliquer à des plans imaginaires et aux figures tracées dans ces plans.

Considérons donc un plan réel, et dans ce plan deux axes rectangulaires réels Ox et Oy, auxquels nous rapporterons les points du plan suivant la méthode de Descartes.

Soient A un point quelconque de ce plan, α et β ses coordonnées réelles ou imaginaires.

L'équation d'un cercle ayant ce point pour centre et la longueur ρ pour rayon sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2.$$

Si nous supposons que le rayon ρ décroisse indéfiniment jusqu'à devenir nul, la courbe représentée par l'équation précédente variera de forme, en demeurant toujours un cercle. A la limite, pour $\rho=0$, elle représentera un

(*) Nous reproduisons ici la première leçon du cours de Géométrie supérieure, professé cette année par M. Laguerre à la salle Gerson, et dont nous devons la rédaction à l'obligeance de l'auteur.

cercle de rayon nul; remarquons que, dans ce cas, le premier membre de son équation se décompose en deux facteurs

$$(y-\beta)+(x-\alpha)i$$

et

$$(y-\beta)-(x-\alpha)i;$$

en sorte que, en réalité, le cercle de rayon nul ayant pour centre le point réel ou imaginaire dont les coordonnées sont α et β se décompose en deux droites dont les équations sont

$$(y-\beta)=i(x-\alpha)$$

et

$$(y-\beta)=-i(x-\alpha).$$

Ces droites remarquables, en lesquelles se décompose un cercle lorsque son rayon devient nul, sont caractérisées évidemment par cette propriété très-simple d'avoir respectivement $+i$ et $-i$ pour coefficient angulaire.

Si donc l'on imagine tracées dans le plan toutes les droites analogues que l'on obtiendrait en considérant tous les cercles de rayon nul ayant pour centres les différents points du plan, l'on voit que toutes ces droites formeront dans le plan deux systèmes de droites parallèles.

Pour l'un de ces systèmes, le coefficient angulaire est $+i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta)=(x-\alpha)i;$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du premier système* passant par le point (α, β). Toutes les droites isotropes du premier système étant parallèles entre elles concourent en un même point de l'infini, qui est défini par le coefficient angulaire commun à ces droites; dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ce point de la droite de l'infini par la lettre I.

Pour l'autre système, le coefficient angulaire est $-i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta) = -i(x-\alpha);$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du second système* passant par le point (α, β). Toutes les droites de ce second système concourent en un même point de la droite de l'infini, que je désignerai constamment par la lettre J.

2. Il était nécessaire, vu l'importance des droites remarquables que je viens de mentionner, de leur donner un nom spécial, bref et expressif. L'expression de droite *isotrope*, n'ayant pas encore de signification en Géométrie, m'a paru convenable pour atteindre ce but; elle se justifie en remarquant que l'équation d'une quelconque de ces droites, comme il est facile de le vérifier, ne change pas de forme lorsque, conservant la même origine pour les axes, on passe du système d'axes primitif à un autre système d'axes rectangulaires quelconques.

Une propriété essentielle de droites isotropes, et qui pourrait servir à les définir, est la suivante : la distance entre deux points quelconques d'une droite isotrope *situés à distance finie dans le plan* est nulle. En d'autres termes, ces droites satisfont à l'équation différentielle

$$ds = 0.$$

Sur une surface quelconque, on peut étudier les courbes qui satisfont à cette équation différentielle; ces courbes sont des lignes géodésiques de la surface, et nous leur donnerons aussi le nom de *lignes isotropes*.

Les deux points remarquables de la droite de l'infini vers lesquels convergent les deux systèmes de droites iso-

tropes d'un plan, et que nous avons désigné par les lettres I et J, méritent aussi, vu leur fréquent usage, une dénomination simple et concise; je les désignerai sous le nom d'*ombilics du plan;* ces points jouent, en effet, dans le plan, le même rôle que jouent, dans la théorie des surfaces du second ordre, les ombilics de ces surfaces situés à l'infini.

3. De ce qui précède, il résulte que par chaque point du plan réel ou imaginaire passent deux droites isotropes, l'une du premier système et l'autre du second système, et que ces droites peuvent être obtenues en joignant le point donné aux deux ombilics du plan.

Les deux droites isotropes passant ainsi par un point A forment, dans leur ensemble, un cercle de rayon nul qui jouit de toutes les propriétés du cercle. Voici celles de ces propriétés sur lesquelles je m'appuierai principalement :

« Si une droite menée par un point B du plan coupe, aux points m et m', les deux droites isotropes issues d'un point A, le produit des segments Bm et Bm' est égal au carré de la longueur BA.

» Les choses étant posées comme précédemment, la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite Bmm' a pour pied le point milieu du segment mm'. »

Le cercle ainsi formé par les deux droites isotropes passant par un point A ne contient évidemment d'autre point réel que le point A, si ce point est réel. Examinons ce qui se passe lorsque le point A est imaginaire.

On peut d'abord remarquer que toute droite imaginaire du plan contient un point réel. En effet, son équation, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire, peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = 0.$$

D'où l'on voit que le point réel, qui est l'intersection des deux droites réelles $P = o$ et $Q = o$, se trouve sur la droite proposée. Toute droite imaginaire contient donc toujours un point réel, qui peut être à l'infini, lorsque les droites $P = o$ et $Q = o$ sont parallèles; dans ce cas, la droite imaginaire passe par un point réel de la droite de l'infini, ou, autrement dit, a une direction réelle. Il est d'ailleurs évident qu'une droite imaginaire ne peut contenir qu'un seul point réel.

.Je dirai que deux points sont *imaginairement conjugués* lorsque leurs coordonnées sont respectivement des quantités imaginairement conjuguées; que deux droites sont imaginairement conjuguées, lorsque l'on peut passer de l'équation de l'une à l'équation de l'autre en changeant $+i$ en $-i$, et réciproquement.

De cette définition, il résulte immédiatement que:

1° Si un point se trouve sur une droite imaginaire D, le point qui lui est imaginairement conjugué se trouve sur la droite imaginairement conjuguée à D;

2° Deux droites imaginairement conjuguées se coupent en un point réel;

3° Deux points imaginairement conjugués sont toujours situés sur une même droite réelle, et cette droite est évidemment la seule droite réelle qu'on puisse faire passer par chacun des deux points.

Cela posé, si, par un point A on mène une droite isotrope du premier système, cette droite contient un point réel a, qui sera d'ailleurs à distance finie, puisque la droite isotrope a une direction imaginaire et coupe la droite de l'infini à l'ombilic I; de même la droite isotrope du second système, passant par le point A, contient un point réel a', situé également à distance finie.

On voit que le point A détermine complétement les deux points a et a'; réciproquement, ces deux derniers

points déterminent sans ambiguïté le point A, car ce dernier point est l'intersection de la droite isotrope du premier système passant par a avec la droite isotrope du second système passant par a'.

Nous pourrons donc fixer sans ambiguïté la position d'un point imaginaire dans le plan, par la position des deux points réels a et a', ou, si l'on veut, par la position du segment aa'; nous dirons que aa' est le *segment représentatif* du point imaginaire A, que a est l'origine de ce segment, et que a' en est l'extrémité.

Il est très-important d'établir que ce segment représentatif d'un point est toujours le même, quels que soient les axes du plan auxquels on l'ait rapporté.

Soient, à cet effet, α et β les coordonnées imaginaires d'un point A, et, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire,

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' i,$$
$$\beta = \beta' + \beta'' i.$$

La droite isotrope du premier système passant par ce point a pour équation

$$(y - \beta' - \beta'' i) = (x - \alpha' - \alpha'' i) i;$$

les coordonnées a_0 et b_0 du point réel a situé sur cette droite sont évidemment

$$a_0 = \alpha' - \beta'',$$

et

$$b_0 = \beta' + \alpha''.$$

Changeons maintenant de système d'axes rectangulaires, en transportant leur origine au point (ξ, η) et, en les faisant tourner de l'angle ω, les formules de transformation à employer seront les suivantes :

$$X = \xi + x \cos\omega - y \sin\omega,$$
$$Y = \eta + x \sin\omega + y \cos\omega.$$

Les nouvelles coordonnées du point A seront, dans ce nouveau système

$$\xi + (\alpha' + \alpha'' i)\cos\omega - (\beta' + \beta'' i)\sin\omega$$

et

$$\eta + (\alpha' + \alpha'' i)\sin\omega + (\beta' + \beta'' i)\cos\omega.$$

Les coordonnées du point réel situé sur la droite isotrope du premier système passant par ce point seront, d'après les formules précédentes,

$$a'_0 = \xi + \alpha'\cos\omega - \beta'\sin\omega - \alpha''\sin\omega - \beta''\cos\omega$$

et

$$b'_0 = \eta + \alpha'\sin\omega + \beta'\cos\omega + \alpha''\cos\omega - \beta''\sin\omega,$$

ou bien

$$a'_0 = \xi + a_0\cos\omega - b_0\sin\omega$$
$$b'_0 = \eta + a_0\sin\omega + b_0\cos\omega.$$

L'on voit que a'_0 et b'_0 se déduisent de a_0 et de b_0 par les formules de transformation données ci-dessus; la proposition est donc démontrée.

4. Cette proposition justifie l'emploi du segment aa' pour représenter le point imaginaire A. La position de ce segment ne dépend que de la position du point imaginaire lui-même, et nullement du choix des axes coordonnés, que nous n'aurons plus dès lors à considérer que pour éclaircir et établir avec plus de sûreté quelques formules fondamentales.

Je désignerai, dans tout ce qui suit, un point imaginaire par une simple lettre, ou, lorsque l'on voudra mettre en évidence les éléments réels qui le déterminent, par son segment représentatif; en sorte qu'un point imaginaire A, ayant pour segment représentatif aa', sera représenté par la notation (a, a').

Aux considérations qui précèdent, j'ajouterai les ré-

flexions suivantes. Quand un point est réel, les deux extrémités du segment qui le représentent se confondent avec ce point lui-même. Le cas d'un point réel est donc contenu dans le cas général d'un point imaginaire.

Soient A un point imaginaire, aa' son segment représentatif; si l'on imagine menée par a une droite isotrope du second système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite Aa; de même, si par a' on mène une droite isotrope du premier système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite Aa'.

Les deux droites ainsi obtenues se coupent en un point A' qui est évidemment le point imaginairement conjugué du point A, et qui sera représenté par le segment $a'a$.

D'où cette proposition : Si (a, a') désigne un point imaginaire, (a', a) désigne le point qui lui est imaginairement conjugué.

D'où encore les conséquences suivantes, que je me borne à mentionner à cause de leur simplicité :

1° La droite réelle qui joint deux points imaginairement conjugués est perpendiculaire au segment qui représente à la fois ces deux points et elle passe par le milieu de ce segment;

2° Si un point imaginaire est situé sur une droite réelle D, et si l'on connaît l'origine a de son segment représentatif, il suffira pour obtenir l'extrémité de ce segment, d'abaisser de l'origine une perpendiculaire sur D et de prolonger cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même.

5. Dans le cours de ces leçons, lorsque, pour plus de clarté ou pour développer certains points particuliers, j'aurai recours à la Géométrie analytique, j'emploierai de préférence un système de coordonnées particulier, déjà employé du reste avec succès par divers géomètres,

et que je désignerai sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Pour le définir, considérons un point quelconque O du plan, et menons par ce point dans un sens déterminé une droite indéfinie $O\omega$, que j'appellerai l'*axe des coordonnées*, le sens positif de cet axe étant fixé par ce qui précède.

Par un point quelconque du plan A, menons une droite isotrope du premier système, et soit α le point de rencontre de cette droite avec l'axe; désignons de même par β le point de rencontre de l'axe avec la droite isotrope du second système passant par le point A. Je prendrai pour coordonnées les deux longueurs $O\alpha$ et $O\beta$, qui définissent évidemment la position du point A, et je poserai $O\alpha = u$, et $O\beta = w$.

Les formules relatives aux coordonnées isotropes sont faciles à établir; je me bornerai aux suivantes, dont je vais me servir tout à l'heure.

Si nous rapportons la figure à des axes rectangulaires, en prenant $O\omega$ pour axe des x, et la perpendiculaire en O pour axe des y, et si, de plus, nous désignons par x et y les coordonnées du point A dans ce nouveau système, l'on voit immédiatement que l'on a

$$u = x + yi,$$
$$w = x - yi.$$

Soient deux points du plan a et a', et ici je les suppose *essentiellement réels*; soient respectivement x, y et x', y', u, w et u', w' leurs coordonnées dans les deux systèmes.

On a les formules connues

$$x' - x = aa' \cos\lambda,$$
$$y' - y = aa' \sin\lambda,$$

formules dans lesquelles aa' est *essentiellement positif*,

et où λ désigne l'angle qu'il faut faire décrire au segment aa', en le faisant tourner autour du point a, dans le sens des aiguilles d'une montre (*), jusqu'à ce que la *direction positive* de cette droite devienne parallèle à la *direction positive* de l'axe Oα. J'entends ici par direction positive de la droite aa', la direction dans laquelle se mouvrait un point mobile allant du point a au point a', sans passer par l'infini.

Il est clair que par la définition qui précède, l'angle λ est défini à un multiple près d'une circonférence entière.

Multiplions maintenant la deuxième des relations précédentes par i, ajoutons-la à la première; retranchons-les ensuite l'une de l'autre, on obtiendra les deux équations fondamentales suivantes :

$$(1) \qquad u' - u = aa' . e^{\lambda i},$$

$$(2) \qquad \varpi' - \varpi = aa' . e^{-\lambda i},$$

équations où aa' et λ ont le sens que j'ai fixé précédemment.

Des deux équations précédentes découlent les deux qui suivent :

$$(3) \qquad \frac{u' - u}{\varpi' - \varpi} = e^{2\lambda i},$$

$$(4) \qquad (u' - u)(\varpi' - \varpi) = \overline{aa'}^2 .$$

Je ferai remarquer, en terminant, que les formules précédentes subsistent même quand les points a et a' sont imaginaires, mais alors il est très-délicat de fixer la valeur précise de l'angle λ.

La formule (4) seule peut être employée sans ambiguïté, car elle détermine le carré de la distance des deux

(*) C'est ce que, durant tout ce Cours, j'appellerai le *sens direct de rotation*.

points, carré qui a par lui-même une valeur parfaitement déterminée.

6. *Évaluation de la distance de deux points imaginaires.*

Soient deux points imaginaires A et B, et soient respectivement u, w et u', w' leurs coordonnées isotropes. Désignons de plus par aa' le segment représentatif du point A, et par bb' le segment représentatif du point B; autrement dit, posons $A = (a, a')$ et $B = (b, b')$.

La formule (4) du paragraphe précédent pouvant être employée même pour des points imaginaires, l'on a

$$\overline{AB}^2 = (u - u')(w - w').$$

Je remarque maintenant que, pour les deux points A et a, la coordonnée u a la même valeur; il en est de même relativement aux deux points B et b; cela résulte évidemment de la définition même des points a et b. Les points a et b étant réels, on peut leur appliquer la formule (1) du paragraphe 5, et l'on a

$$u' - u = ab \,.\, e^{\lambda i},$$

ab étant pris en valeur absolue, et λ désignant l'angle dont il faut faire tourner la direction ab pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

De même les deux points A et a', ainsi que les deux points B et b' ayant respectivement pour la coordonnée w la même valeur, l'on a sans ambiguïté

$$w' - w = a'b' \,.\, e^{-\theta i},$$

$a'b'$ étant pris en valeur absolue, et θ désignant l'angle dont il faut faire tourner la direction $a'b'$ pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

Des relations précédentes, on déduit immédiatement

$$(u' - u)(\varpi' - \varpi) = \overline{\mathrm{AB}}^2 = ab \,.\, a'b' \,.\, e^{(\lambda - \theta)i},$$

ou en posant $\lambda - \theta = \mu$,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = ab \,.\, a'b' \,.\, e^{\mu i}.$$

Il est clair que l'angle μ est l'angle dont il faut faire tourner la direction ab, autour du point a et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à $a'b'$.

On a donc la proposition fondamentale suivante :

PROPOSITION. — *Étant donnés deux points imaginaires* $\mathrm{A} = (a, a')$ *et* $\mathrm{B} = (b, b')$, *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire dont le module est la racine carrée du produit des longueurs* ab *et* $a'b'$, *ces longueurs étant prises positivement, et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la direction* ab, *autour du point* a *et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à* $a'b'$.

Remarque. La proposition précédente s'applique évidemment au cas où l'un des deux points donnés est réel, les deux extrémités du segment qui le représente se confondant alors avec ce point lui-même.

7. Deux points A et B, réels ou imaginaires, étant donnés dans un plan, on peut, comme on vient de le voir, déterminer facilement et sans ambiguïté le carré de la distance AB.

Quant à la distance AB elle-même, elle n'est déterminée qu'au signe près; ou, si l'on veut, l'argument de la quantité imaginaire qui exprime sa valeur n'est déterminé qu'à un multiple près de π.

Un segment de droite isolé ne peut, en effet, comporter par lui-même aucun signe; mais quand il se trouve sur

une droite déterminée, réelle ou imaginaire, et quand on a préalablement fixé le sens que l'on est convenu de regarder comme positif sur cette droite, le segment a lui-même une valeur bien déterminée.

C'est à la détermination de cette valeur que je consacrerai la leçon suivante.

SUR LA RÈGLE DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Lorsque, dans une figure, l'on a à considérer des segments comptés sur une même droite, ou des angles ayant même sommet, tous les géomètres ont reconnu l'utilité et la nécessité d'affecter un signe à ces segments et à ces angles; le *Cours de Géométrie supérieure* de M. Chasles offre un exemple des nombreux avantages que l'emploi de la règle des signes a ainsi introduits dans la science.

Mais lorsque l'on considère des segments comptés sur des droites différentes ou des angles n'ayant pas le même sommet, il semble généralement admis que la règle des signes n'est plus applicable. M. Chasles, dans la Préface de son Cours, exprime formellement cette idée :

« Si l'on ne démontre ordinairement, dit-il (Préface de la *Géométrie supérieure*, p. IX), une formule ou une relation que par une certaine figure, et non dans l'état d'abstraction et de généralité qui permettrait, au moyen des signes + et — affectés aux segments et aux angles, pour marquer leur direction, de l'adapter à tous les états de la figure, il est facile d'en reconnaître la raison. C'est que les propositions qui forment le plus ordinairement les éléments de démonstration, dans la Géométrie an-

cienne, ne comportent pas l'application du principe des signes. Telles sont la proportionnalité des côtés homologues dans les triangles semblables, *celle encore de la proportionnalité, dans tout triangle, des côtés aux sinus des angles opposés. La règle des signes ne s'applique point à ces propositions, puisque les segments que l'on y considère sont formés sur des lignes différentes, et les angles autour de sommets différents..* »

Je me propose de faire voir, dans cette Note, que, contrairement à l'idée émise par l'illustre géomètre, la règle des signes s'applique à tous les théorèmes de Géométrie sans exception.

Je me bornerai à examiner, sous ce point de vue, la dernière des propositions mentionnées dans la citation que j'ai reproduite ci-dessus. Les considérations très-simples qui, dans ce cas, résolvent la question, s'étendent d'elles-mêmes à toutes les autres propositions; ce théorème, d'ailleurs, est l'un de ceux dont l'usage est le plus fréquent pour établir les relations qui existent entre des segments comptés sur des droites différentes, en sorte qu'il suffit presque d'établir, relativement à ce théorème, la règle des signes pour légitimer d'une façon générale l'emploi de cette règle.

2. Étant donnés un certain nombre de points situés sur une même droite, on peut assigner à cette droite un certain sens positif, en admettant qu'un point mobile, qui se mouvrait dans ce sens sur la droite, parcourt des longueurs positives. Cette assignation pourra, dans la plupart des cas, être faite arbitrairement; dans d'autres cas, au contraire, elle devra être faite d'une manière déterminée, en sorte que cette détermination elle-même sera une partie essentielle de la proposition de Géométrie que l'on aura à considérer.

Quoi qu'il en soit, cette assignation une fois faite, pour éviter toute confusion, je désignerai une droite sur laquelle on aura fixé le sens positif sous le nom de *direction*. Deux points A et B, se trouvant sur une direction donnée d, le segment AB a un signe parfaitement déterminé, et il est clair que ce signe change quand on change la direction de d.

Étant données deux directions a et b, l'angle (a, b) que fait la direction a avec la direction b est l'angle dont il faut faire tourner a autour de l'intersection des deux droites jusqu'à ce que les deux directions s'appliquent l'une sur l'autre et soient dirigées dans le même sens. Cet angle, on le voit, est déterminé, à un multiple près d'une circonférence entière; son sinus et son cosinus sont donc aussi parfaitement déterminés.

Étant donné l'angle (a, b) de deux directions, si l'une de ces directions change de sens, l'angle est augmenté d'une demi-circonférence; par conséquent, le sinus et le cosinus de cet angle changent de signe.

3. Cela posé, nous pourrons énoncer de la façon suivante la proposition relative à la proportionnalité des côtés d'un triangle aux sinus des angles opposés.

Proposition. — *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on assigne arbitrairement un sens positif aux trois droites qui forment les côtés de ce triangle, et si l'on désigne par* a, b, c *les trois directions ainsi obtenues*, a *étant la direction qui renferme les côtés* B *et* C, etc., *on a les relations suivantes, qui comportent la règle des signes*,

$$\frac{AB}{\sin(a, b)} = \frac{BC}{\sin(b, c)} = \frac{CA}{\sin(c, a)}.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'assigner aux côtés du triangle une direction déterminée : on vé-

rifie facilement l'exactitude des formules ci-dessus. On peut remarquer maintenant que l'on peut, sans qu'elles cessent d'être exactes, prendre un côté quelconque dans un sens inverse à celui que l'on considérait tout d'abord.

Supposons, par exemple, que l'on change le sens de la direction a, BC changera alors de signe, ainsi que sin (a, b) et sin (c, a); les autres quantités ne subissant aucun changement, l'on voit que, dans la série d'égalités précédentes, chaque terme aura changé de signe : l'égalité ne sera donc pas troublée.

4. La proposition précédente étant établie en toute rigueur, je m'en servirai pour démontrer la relation qui existe entre le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites et le rapport anharmonique des quatre points où ce faisceau est coupé par une transversale quelconque.

M. Chasles (*Géométrie supérieure*, § XIII), pour établir cette relation, emploie aussi la proposition précédente; mais comme, pour lui, elle ne comporte pas l'emploi de la règle des signes, il démontre d'abord par son moyen que les deux rapports anharmoniques ont la même valeur absolue; il prouve ensuite, par une considération directe, qu'ils ont le même signe.

Il est facile de voir que le théorème de la proportionnalité des côtés aux sinus suffit pour la démonstration de l'égalité des deux rapports.

Soit un faisceau de quatre droites passant par un même point O; assignons à chacune de ces droites un sens positif abitraire, et soient a, b, c, d les quatre directions ainsi obtenues. Soient, de plus, A, B, C, D les points où une transversale quelconque coupe les droites de ce faisceau; donnons à cette transversale un sens positif pris

arbitrairement, et appelons ω la direction de cette transversale. Cela posé, en appliquant au triangle OAB la proposition énoncée ci-dessus, il viendra

$$\frac{AB}{OA} = \frac{\sin(b, a)}{\sin(\omega, b)};$$

de même le triangle OAB donnera

$$\frac{AD}{OA} = \frac{\sin(d, a)}{\sin(\omega, d)},$$

d'où

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin(b, a)}{\sin(\omega, b)} \cdot \frac{\sin(\omega, d)}{\sin(d, a)};$$

on aurait de même

$$\frac{CB}{CD} = \frac{\sin(b, c)}{\sin(\omega, b)} \cdot \frac{\sin(\omega, d)}{\sin(d, c)},$$

d'où enfin

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{\sin(a, b)}{\sin(a, d)} : \frac{\sin(c, b)}{\sin(c, d)},$$

égalité qui, ainsi que la proposition dont j'étais parti, comporte la règle des signes.

Il est à remarquer que la valeur du rapport anharmonique du faisceau de quatre droites donnée dans le second membre est indépendante du sens positif que l'on a assigné à ces droites; car, si l'on prend en sens contraire l'une de ces directions, la direction a par exemple, $\sin(a, b)$ et $\sin(a, d)$ changeant à la fois de signe, leur rapport reste invariable.

5. Sans multiplier davantage les exemples, j'énoncerai la conclusion suivante :

« Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à des angles situés d'une façon quelconque dans un plan est

convenablement et complétement énoncé, il doit toujours comporter la règle des signes. »

Les divers théorèmes se distribuent en deux classes bien distinctes. Pour les uns, on peut choisir d'une façon arbitraire le sens dans lequel est prise la direction positive d'un certain nombre de droites, et alors le sens dans lequel on doit prendre les autres droites de la figure est déterminé par les théorèmes eux-mêmes, et cette détermination en est un élément essentiel : la façon dont elle est faite doit faire partie de l'énoncé lui-même de ces théorèmes.

Pour les autres, et ce sont les plus nombreux, le sens positif que l'on doit attribuer aux diverses droites de la figure est complétement arbitraire; et si les théorèmes sont convenablement énoncés, ils doivent être vérifiés quelle que soit la façon dont on fasse cette attribution.

Les considérations qui précèdent ne sont pas sans doute de nature à trouver place dans l'enseignement élémentaire; leur introduction compliquerait souvent et inutilement les questions; néanmoins, comme elles tiennent à un point de doctrine souvent controversé, j'ai cru qu'il n'était pas inutile de les présenter.

MÉTHODE DE L'ÉLIMINATION DES INTERVALLES

pour servir à la résolution des équations algébriques et transcendantes;

PAR M. HERMANN,

Ancien Élève de l'École Normale.

Cauchy a donné, pour le calcul numérique de la plus petite racine positive d'une équation algébrique, une

formule d'approximation remarquable, en ce qu'elle permet de calculer cette racine, quelles que soient les limites qui la comprennent, en prenant même, si l'on veut, les limites supérieures et inférieures des racines positives de l'équation. Partant, cette méthode permettrait de calculer successivement toutes les racines en les considérant successivement comme étant chacune la plus petite. Toutefois, dans l'esprit de Cauchy et de ceux qui ont écrit depuis sur ce sujet, il était nécessaire, pour l'application de la méthode à une racine, que cette racine fût séparée; on n'avait donné jusqu'ici aucun caractère permettant de reconnaître avec certitude si, en partant d'un nombre a, l'équation ne contenait aucune racine plus grande que a. Néanmoins la formule de Cauchy, interprétée d'une manière convenable, constitue une méthode complétement générale pour la résolution des équations numériques. Toutefois, il est bon de la combiner avec quelques caractères éliminatoires qui en facilitent les applications.

C'est à l'ensemble de ces caractères éliminatoires et de la formule de Cauchy, que je propose de donner le nom de *méthode d'élimination des intervalles*, parce que le caractère comme le but de cette méthode est d'éliminer successivement les intervalles qui ne contiennent pas de racines réelles.

Occupons-nous d'abord de la recherche de ces caractères.

Premier caractère éliminatoire. — Soit une équation $f(x) = 0$, que j'écris sous la forme

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$

$\varphi(x)$ étant l'ensemble des termes précédés du signe $+$, $\psi(x)$ l'ensemble des termes précédés du signe $-$. L'équa-

tion n'aura aucune racine comprise entre a et b si les deux quantités $f(a)$, $f(b)$ étant de mêmes signes, par exemple positives, il en est de même de

$$\varphi(a) - \psi(b),$$

car cette quantité est inférieure à la plus petite valeur de $f(x)$ entre a et b. Cette simple remarque pourrait suffire pour la résolution des équations numériques, algébriques ou transcendantes; seulement, dans une équation transcendante, les termes positifs ne sont pas toujours ceux qui sont précédés du signe $+$, les termes négatifs ceux qui sont précédés du signe $-$, et la plus petite valeur d'un terme n'a pas toujours lieu pour la plus petite valeur de la variable; mais cela n'infirme en rien la conclusion précédente. Seulement, dans les termes précédents, il faudra remplacer x tantôt par a, tantôt par b, de manière à leur donner leur petite valeur, et, dans l'ensemble des termes négatifs, remplacer également x tantôt par a, tantôt par b, de manière à leur donner leur plus grande valeur. Ce caractère se présentera toujours si les termes a et b sont suffisamment rapprochés; car dire que $f(x)$ est positif, c'est dire que l'ensemble des termes positifs l'emporte d'une quantité finie sur l'ensemble des termes négatifs, et la substitution de a à b dans un terme ou un coefficient n'altère qu'infiniment peu ce terme ou ce coefficient si les nombres a et b sont suffisamment voisins. Considérons par exemple l'équation transcendante

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

Cherchons si cette équation a des racines réelles comprises entre 92 et 95 degés. Le résultat de la substitution de 92 degrés est :

pour 92° . . . . — 3,475,
pour 95° . . . . — 3,653.

L'équation n'aura aucune racine réelle entre 92 et 95 degrés, si, en donnant au terme négatif $(4 - 3x^{0}) \sin x$ sa plus petite valeur, au terme positif $-4x \cos x$ sa plus grande valeur, on a encore un résultat négatif. La plus petite valeur absolue du terme

$$(4 - 3x^2) \sin x$$

s'obtiendra en remplaçant x par 92 degrés dans $3x^2$, et par 95 degrés dans $\sin x$. On obtient ainsi

$$-3,722.$$

La plus grande valeur du terme $-4x \cos x$ aura lieu pour $x = 95^{\circ}$, ce qui donne

$$+0,577,$$

comme

$$-3,722 + 0,577$$

est négatif.

L'équation transcendante n'a aucune racine réelle comprise entre 92 et 95 degrés.

Deuxième caractère éliminatoire. — Si deux nombres, a et b, substitués dans le premier membre d'une équation, donnent des résultats de même signe, par exemple positifs, l'équation n'aura aucune racine réelle comprise entre a et b, si la quantité

$$\varphi'(a) - \varphi'(b)$$

a le même signe que $f(a)$ et $f(b)$. Le caractère est une conséquence de la formule de Cauchy.

Formule de Cauchy. — Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Une fonction (*) ayant un certain signe, par exemple positif, trouver une limite de l'intervalle pour lequel cette fonction conserve son signe.

Supposons qu'une fonction soit positive pour $x = a$ et $x = b$, il est clair que cette fonction sera positive tant que l'on aura

$$f(a+h) > 0; \tag{1}$$

or on a

$$\begin{aligned} f(a+h) &= fa + h\,[f'(a+\theta h)] \\ &= fa + h\,[\varphi'(a+\theta h) - \psi'(a+\theta h)]. \end{aligned}$$

Or $\varphi'(a+\theta h)$ est toujours supérieur à $\varphi'(a)$, $\psi'(a+\theta h)$ est toujours inférieur à $\psi'(b)$; par conséquent, pour satisfaire à l'inégalité (1), il suffira de satisfaire à l'inégalité

$$f(a) + h[\varphi'(a) - \psi'(b)] > 0;$$

si $\varphi'(a) - \psi'(b)$ est positif, cette inégalité aura lieu d'elle-même, sinon il suffira de prendre

$$h < \frac{fa}{\psi'(b) - \varphi'(a)}. \tag{2}$$

La formule (2) est la formule de Cauchy. L'interprétation que nous en avons donnée permet de l'appliquer à la résolution numérique des équations, puisqu'elle permet, à partir d'une valeur quelconque de la variable, d'éliminer un intervalle ne contenant pas de racines réelles. Elle s'applique également aux équations transcendantes sous le bénéfice des précautions que nous avons déjà indiquées.

(*) C'est en donnant cette interprétation à la formule de Cauchy qu'il nous a été possible de créer la méthode d'élimination des intervalles.

On pourrait de même trouver, à partir de b, une limite k telle, que l'équation n'ait aucune racine comprise entre $b-k$ et b. On trouvera facilement que si la quantité

$$\psi'(a)-\varphi'(b)$$

est positive, l'équation n'aura aucune racine réelle comprise entre a et b, ce qui constitue un troisième caractère éliminatoire, et que, si cette quantité est négative, l'équation n'aura aucune racine comprise entre

$$b \text{ et } b-\frac{f(b)}{\varphi'(b)-\psi'(a)}.$$

En résumé, nous voyons que si une fonction est de même signe pour deux valeurs a et b de la variable, nous pourrons reconnaître que l'équation n'a aucune racine comprise entre a et b, si le signe de $f(a)$ et de $f(b)$ est le même que celui d'une des trois équations suivantes :

$$\varphi(a)-\psi(b),$$
$$\varphi'(a)-\psi'(b),$$
$$\psi'(a)-\varphi'(b).$$

Si chacune de ces quantités n'est pas de même signe que $f(a)$ et $f(b)$, l'équation n'aura néanmoins aucune racine comprise entre

$$a+\frac{f(a)}{\psi(b)-\varphi'(a)} \quad \text{et} \quad b-\frac{f(b)}{\varphi'(b)-\psi'(a)}.$$

D'après cela, pour résoudre une équation par la méthode de l'élimination des intervalles, on fera des substitutions équidistantes ou non dans les fonctions

$$\varphi(x), \quad \psi(x),$$
$$\varphi'(x), \quad \psi'(x);$$

les caractères éliminatoires permettront de rejeter un grand nombre d'intervalles ne contenant pas de racines réelles, et la formule d'approximation de resserrer la recherche des racines réelles dans les intervalles non éliminés. S'il s'agit d'une équation algébrique, il sera bon de faire ces substitutions par la méthode des différences qui se prête d'une manière remarquable à la recherche des résultats obtenus dans une série de substitutions équidistantes. Pour les équations transcendantes, la méthode des différences ne peut plus être employée, et c'est au calculateur à diriger d'une manière convenable les substitutions, par exemple en employant la méthode de double fausse position. Mais la méthode d'élimination des intervalles offre cela de remarquable qu'elle est applicable à toutes les formes d'équations transcendantes, et qu'elle participe à la généralité de la série de Taylor, dont elle est une application importante.

Application numérique. — L'exemple suivant fera mieux saisir l'usage des caractères et de la formule d'approximation.

Soit proposé de résoudre l'équation

$$x^5 - 8x^3 + x^2 - 2x + 10 = 0.$$

Occupons-nous seulement de la recherche des racines positives. 4 est la limite supérieure des racines positives. Je substitue, dans le premier membre, les nombres 0, 1, 2, 3, 4 :

$$\varphi(x) = x^5 + x^2 + 10, \quad -\psi(x) = -8x^3 - 2x.$$

0	+ 10	— 0	int. élim. d'après
1	+ 12	— 10	le 1[er] caract.
2	+ 46	— 68	
3	+ 262	— 222	
4	+ 1040	— 520	

Pour trouver les racines de l'équation comprises entre 1 et 2, substituons dans $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des nombres équidistants de 0,1 :

1	+ 12	− 10	
1,1	+ 12,820	− 12,848	
1,2	+ 13,928	− 16,224	éliminé.
1,3	+ 15,403	− 20,176	
1,4	+ 17,338	− 24,752	*Id.*
1,5	+ 19,843	− 30,000	*Id.*
1,6	+ 23,045	− 35,068	*Id.*
1,7	+ 27,079	− 42,704	*Id.*
1,8	+ 32,197	− 50,256	*Id.*
1,9	»	»	*Id.*
2	+ 46	− 68	

L'équation a un nombre impair de racines comprises entre 1 et 1,1, et n'en a aucune entre 1,2 et 2. Pour l'intervalle compris entre 1,1 et 1,2, il y a doute. Ayons recours au deuxième caractère éliminatoire, substituons 1,1 et 1,2 dans $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$.

	$\varphi'(x)$	$\psi'(x)$	
1,1	+ 9,74	− 31,4	éliminé.
1,2	+ 12,968	− 36,56	

La formule d'approximation nous permet de resserrer la recherche des racines comprises entre 1 et 1,1; elle nous apprend que l'équation n'a aucune racine comprise entre 1 et $1 + \dfrac{f(1)}{\psi'(1,1) - \varphi'(1)}$, ou entre 1 et 1,08.

Les racines réelles comprises entre 1 et 2 se trouvent resserrées dans l'intervalle compris entre 1,08 et 1,10, intervalle qu'il serait facile de resserrer encore davantage.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE (*);

PAR M. GRANT,
Élève de l'institution Massin.

Un cercle variable, assujetti à passer par un point fixe P, *coupe une conique aux points* A, A', A'', A'''. *Démontrer que la quantité* $\frac{PA.PA'.PA''.PA'''}{R^2}$ *est constante*, R *étant le rayon du cercle.*

Soient d et d' les distances du point P avec les deux droites AA' et A''A'''. On a, d'après un théorème connu,

$$PA.PA' = 2dR,$$
$$PA''.PA''' = 2d'R,$$

d'où

$$\frac{PA.PA'.PA''.PA'''}{R^2} = 4dd'.$$

Tout revient à démontrer que dd' est constant. Je prends des axes rectangulaires dont l'origine est en P. Les équations de la conique et du cercle sont

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0.$$

Pour une certaine valeur de λ, l'équation

$$(1) \qquad (A+\lambda)x^2 + 2Bxy + (C+\lambda)y^2 + \ldots + F = 0$$

devra représenter les deux droites AA' et A''A''', c'est-

(*) Ce théorème s'étend à toutes les courbes algébriques; voir (*Comptes rendus*, janvier 1865) une Note de M. Laguerre sur les propriétés générales des courbes algébriques.

-dire que, si les équations de ces deux droites sont

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - d = 0,$$
$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - d' = 0,$$

l'équation (1) devra, pour une certaine valeur de λ, être identique à l'équation

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha - d)(x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - d') = 0,$$

ou bien

$$x^2\cos\alpha\cos\alpha' + 2xy\sin(\alpha+\alpha') + y^2\sin\alpha\sin\alpha' + \ldots + dd' = 0.$$

J'identifie; l'on a

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{A+\lambda} = \frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{C+\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{B} = \frac{dd'}{F};$$

d'où

$$\frac{\cos(\alpha+\alpha')}{A-C} = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{B} = \frac{dd'}{F},$$

et, par suite,

$$dd' = \frac{F}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}};$$

ce qui démontre que dd' est constant.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 957

(voir 2e série, t. VIII, p. 479).

SOLUTION DE M. LIONNET.

Euler dit avec raison que Fermat, en proposant cette question aux géomètres de son temps, avait en vue un

mode de démonstration exclusivement géométrique, à la manière des anciens qui rejetaient toute espèce de démonstration algébrique (*Demonstrationes quæ analysin olent*). Sans cette explication, on aurait de la peine à comprendre qu'une question si facile à résoudre ait été proposée par Fermat, et qu'aucun des géomètres contemporains n'en ait donné la solution. Celle que nous proposons aux lecteurs des *Nouvelles Annales* nous paraît remplir toutes les conditions exigées par le célèbre géomètre toulousain.

ÉNONCÉ. — *Étant donné un demi-cercle* AMB *dont* AB *est le diamètre, et, de l'autre côté de* AB, *un rectangle* ABCD *dont la hauteur* AD *est égale au côté du carré inscrit dans le cercle, d'un point quelconque* M *de la demi-circonférence on mène les droites* MC, MD *qui coupent* AB *aux points* c, d; *et il s'agit de démontrer que*

$$(1) \qquad \overline{Ac}^2 + \overline{Bd}^2 = \overline{AB}^2 \ (^*).$$

DÉMONSTRATION. — Menons les droites MA, MB jusqu'à la rencontre de la direction CD en A′, B′, puis AE perpendiculaire à MA′ jusqu'à la rencontre de A′B′ en E. L'angle AMB inscrit dans un demi-cercle étant droit, les lignes AE, BB′ perpendiculaires à MA′ sont parallèles, et, de plus, égales entre elles comme opposées dans un parallélogramme; donc les triangles rectangles ADE, BCB′ ayant l'hypoténuse égale et un autre côté AD = BC, le troisième côté DE = B′C. De plus, les droites parallèles AB, A′B′ étant divisées aux points c et C, d et D

(*) AB, CD étant des droites quelconques, nous désignons par $\overline{AB}^2$ le carré construit sur AB, et par rect(AB, CD) le rectangle dont AB, CD sont les deux dimensions.

en segments proportionnels, on a

$$AB : A'B' = Ac : A'C = Bd : B'D;$$

donc le triangle ayant pour côtés les droites AB, Ac, Bd, dont la plus grande est moindre que la somme des deux autres, est semblable au triangle qui a pour côtés les droites A'B', A'C, B'D; donc, pour établir l'égalité (1), il suffit de prouver que ce dernier triangle est rectangle, ou, autrement, qu'on a

$$(2) \qquad \overline{A'C}^2 + \overline{B'D}^2 = \overline{A'B'}^2.$$

Or la somme des carrés faits sur A'C et B'D, sommes des droites A'D, CD et CD, B'C, est égale à la somme des carrés faits sur A'D, CD, B'C, plus $\overline{CD}^2$, plus deux fois la somme des rectangles (A'D, CD), (CD, B'C); et, d'autre part, le carré fait sur A'B', somme des droites A'D, CD, B'C, est égal à la somme des carrés faits sur ces trois droites, plus deux fois la somme des rectangles (A'D, CD), (CD, B'C), (A'D, B'C); donc, pour démontrer l'égalité (2), il suffit de prouver qu'on a

$$\overline{CD}^2 = 2\,\text{rect}(A'D, B'C),$$

ou

$$(3) \qquad 2\overline{AD}^2 = 2\,\text{rect}(A'D, DE),$$

en observant que AD est égal au côté du carré inscrit dans le cercle dont le diamètre AB = CD, et que B'C = DE. Mais chacune des lignes AA', AE, A'E dont la dernière égale A'D + DE, étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on a

$$\overline{A'D}^2 + \overline{DE}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{A'D}^2 + \overline{DE}^2 + 2\,\text{rect}(A'D, DE),$$

ou

$$2\overline{AD}^2 = 2\,\text{rect}(A'D, DE). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

ERRATUM DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 399, colonne D.c., ligne 21 : *au lieu de* 463, *lisez* 464.

QUESTIONS.

988. Étant donnée une ellipse de Cassini, et étant pris sur cette ellipse deux couples de points diamétralement opposés a, a' et b, b'; si l'on joint ces quatre points à un point quelconque m de la courbe, la différence des angles $a'ma$ et $b'mb$ est constante. (E. Laguerre.)

989. Une conique passant par quatre points m, n et p, q; soit h le point de rencontre des droites mn et pq, et désignons respectivement par a et b les points où une tangente quelconque à la conique coupe les droites mn et pq.

Démontrer que l'on a la relation suivante :

$$\frac{\sqrt{am.bp}}{\sqrt{hm.hp}} + \frac{\sqrt{an.bq}}{\sqrt{hn.hq}} = C\sqrt{ah.bh},$$

la lettre C désignant une constante. (E. Laguerre.)

990. On donne un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et un point O. Désignant par V_1 le volume $OA_2A_3A_4$, par V_2 le volume $OA_1A_3A_4, \ldots$, on aura la relation

$$\Sigma\, \overline{OA}_1^2\, V_1^2 + 2\Sigma\, \overline{OA_2}\,\overline{OA_3} \cos \widehat{A_2OA_3}\, V_2V_3 = 0.$$

Les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 doivent être affectés d'un signe tel, que leur somme soit égale au volume du tétraèdre donné. (H. Faure.)

LOIS DES CONIQUES SUROSCULATRICES DANS LES SURFACES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

Pour faciliter l'exposition de ce qui suit, je prie le lecteur de me permettre quelques dénominations inusitées.

Lorsqu'à partir d'un point déterminé d'une courbe les trois éléments consécutifs du polygone infinitésimal qui représente idéalement cette courbe seront sur un même cercle, celui-ci, contenant alors quatre points consécutifs de la courbe, formera une exception parmi les cercles osculateurs qui généralement n'en contiennent que trois; je l'appellerai un *cercle surosculateur*.

De même, lorsque la parabole osculatrice, qui est toujours déterminée par trois éléments infinitésimaux, c'est-à-dire par quatre points infiniment voisins, contiendra, par exception, un quatrième élément, un cinquième point, ce sera une *parabole surosculatrice*.

Et, à son tour, une conique, ellipse ou hyperbole, sera dite *surosculatrice* lorsqu'au delà des cinq points infiniment voisins qui suffisent à la détermination de la conique osculatrice ordinaire, elle contiendra un sixième point.

Ceci entendu, c'est une question de quelque intérêt dans la théorie des surfaces que celle de savoir si, en chaque point d'une surface quelconque, il y a quelque loi précise pour le nombre et la situation des courbes surosculatrices, cercle, parabole, ellipse et hyperbole.

Depuis longtemps, on sait qu'en chaque point d'une

surface il existe deux droites contenant trois points consécutifs de la surface, et qu'ainsi on pourrait appeler des *droites surosculatrices*. Ce sont les deux asymptotes, réelles ou imaginaires, de l'indicatrice. Mais il ne faudrait pas demander combien il y a en chaque point de cercles surosculateurs, de paraboles, d'ellipses ou d'hyperboles surosculatrices; car il y en a une infinité, et cette question ne peut être posée qu'eu égard à un ensemble de sections de la surface qui soit lui-même bien défini (*). Je vais faire voir, par exemple, en négligeant d'abord la considération des cercles et des paraboles, que, dans l'ensemble des sections planes contenant une même droite menée par le point donné, droite normale ou oblique, mais non tangente à la surface, il y a toujours NEUF de ces sections qui admettent des coniques surosculatrices (ellipses ou hyperboles), et que, dans l'ensemble des sections menées par une même tangente, il y en a toujours TROIS qui jouissent de cette propriété.

II.

Soient OX et OY deux droites rectangulaires menées dans le plan qui touche la surface au point O. Soit prise pour troisième axe la droite OZ oblique ou normale qui définit l'ensemble des sections planes qu'on veut considérer.

L'ordonnée de la surface parallèle à l'axe des Z pourra

(*) Selon M. Spottiswoode, on peut mener en chaque point d'une surface DIX coniques, réelles ou imaginaires par couples, ayant avec cette surface un contact du cinquième ordre, c'est-à-dire six points communs (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 21 mars 1870); mais l'auteur n'ayant pas défini le système de sections qui offrent ce nombre de dix coniques surosculatrices, l'énoncé de son théorème paraît être incomplet.

être développée sous la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} Z = \frac{1}{2!}(b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2) + \frac{1}{3!}(c_0 x^3 + 3c_1 x^2 y + \ldots) \\ \qquad + \frac{1}{4!}(d_0 x^4 + 4d_1 x^3 y + \ldots) + \frac{1}{5!}(e_0 x^5 + \ldots + e_5 y^5) + \ldots . \end{cases}$$

Considérons un plan mené par l'axe des Z et dont la trace sur le plan des XY fasse avec l'axe des X un angle θ. Toute courbe tracée dans ce plan de manière à y toucher en O cette même trace prise pour axe des x' aura dans son plan une équation de la forme

$$(2)\quad Z = \frac{1}{2!} q x'^2 + \frac{1}{3!} r x'^3 + \frac{1}{4!} s x'^4 + \frac{1}{5!} t x'^5 + \ldots .$$

Or, si ce développement (2) doit représenter la section elle-même, on aura les relations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} q = b_0 \cos^2\theta + 2b_1 \sin\theta\cos\theta + b_2 \sin^2\theta, \\ r = c_0 \cos^3\theta + 3c_1 \sin\theta\cos^2\theta + \ldots, \\ s = d_0 \cos^4\theta + 4d_1 \sin\theta\cos^3\theta + \ldots, \\ t = e_0 \cos^5\theta + 5e_1 \sin\theta\cos^4\theta + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

au lieu que, si la forme (2) devait correspondre à une conique tracée dans le plan sécant de manière à y toucher l'axe des x' à l'origine, c'est-à-dire à une conique ayant une équation de la forme

$$(4)\quad Az^2 + 2Bx'z + Cx'^2 + 2Dz = 0,$$

on trouverait aisément les valeurs correspondantes des trois premiers coefficients q, r, s en fonction des quotients $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, ou réciproquement les valeurs de ces quotients en fonction de ces trois coefficients; mais on trouverait ensuite une quatrième relation impliquant à

la fois les quatre coefficients q, r, s, t et les mêmes trois quotients $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$. Il suit de là que, quand la forme (2) représente une section conique, on a entre les quatre premiers coefficients une certaine relation, à savoir la relation

$$(5) \qquad 9tq^2 - 45qrs + 40r^3 = 0.$$

Donc, si les valeurs de q, r, s, t marquées (3) comme appartenant à la section de la surface satisfont à cette relation (5), la conique (4), dont les coefficients $\frac{A}{D}$,... auront été déterminés par les trois premières valeurs q, r, s, aura un contact du cinquième ordre avec cette section; elle lui sera surosculatrice. Or il est aisé de voir que cette relation (5), lorsqu'on y substitue les expressions (3), donne lieu à une équation du neuvième degré en tangθ. Donc il est vrai de dire que, parmi les sections planes menées suivant une droite quelconque, oblique ou normale, mais non tangente, il y en a NEUF donnant lieu à une conique surosculatrice : étant d'ailleurs bien entendu qu'une seule de ces neuf sections à conique surosculatrice subsiste nécessairement, les huit autres pouvant être imaginaires par couples.

III.

Pour trouver la loi des coniques surosculatrices dans les sections menées par une même tangente, je supposerai le développement (1) relatif à des axes rectangulaires. J'imaginerai un plan sécant mené par l'axe des x et faisant un angle θ avec le plan des ZX. Si l'on rapporte la section correspondante à deux droites qui soient premièrement ce même axe des x, et ensuite un nouvel axe des Z qui soit la trace du plan sécant sur celui des ZY, le déve-

loppement de l'ordonnée de cette section sera

$$Z = q\frac{x^2}{2!} + r\frac{x^3}{3!} + s\frac{x^4}{4!} + t\frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

D'ailleurs, si l'équation de la surface est représentée par

$$Z = \varphi(x, y),$$

celle de la même section dans son plan le sera par

$$Z\cos\theta = \varphi(x, Z\sin\theta);$$

ce qui permet de calculer la suite indéfinie des coefficients q, r, s, t,... au moyen des dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, ..., calculées elles-mêmes pour le cas de $x = 0$, c'est-à-dire la suite des coefficients q, r, s, t,... au moyen des b_0, b_1, b_2, c_0,....

On trouvera ainsi les relations

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} q &= \frac{b_0}{\cos\theta}, \\ r &= \frac{c_0\cos\theta + 3b_1b_0\sin\theta}{\cos^2\theta}, \\ s &= \frac{d_0\cos^2\theta + (6c_1b_0 + 4b_1c_0)\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta} \\ &\quad + \frac{(12b_1^2b_0 + 3b_2b_0^2)\sin^2\theta}{\cos^3\theta}, \\ t &= \frac{e_0\cos^3\theta + \ldots}{\cos^4\theta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Or ici la condition pour qu'une conique tracée dans le plan sécant soit surosculatrice de la section au point O, c'est que les valeurs (3 *bis*) de q, r, s, t satisfassent à la relation (5) du paragraphe précédent. Ceci conduira à une équation du troisième degré en tangθ. Il est donc

vrai de dire que, parmi les sections planes contenant une même tangente, il en est TROIS donnant lieu à une conique osculatrice, TROIS dont l'une au moins est toujours réelle. D'ailleurs, l'une de ces trois sections est le plan tangent lui-même, et la conique surosculatrice y résulte du système des deux asymptotes de l'indicatrice.

IV.

Cercles surosculateurs. — Ces sortes de cercles sont dignes de remarque, parce que les points auxquels ils correspondent dans les courbes planes sont analogues à ceux qu'on appelle *sommets* dans les sections coniques. Or, parmi toutes les sections normales en un même point, il y en a TROIS qui donnent lieu à un cercle surosculateur, et parmi les sections contenant une même tangente il n'y en a qu'UNE.

Paraboles surosculatrices. — Parmi les sections normales relatives à un même point, le nombre des sections douées à ce point d'une parabole surosculatrice dépend d'une équation du SIXIÈME degré; de sorte que ce nombre est l'un des suivants : 0, 2, 4 ou 6. De plus, parmi les sections contenant une même tangente, il y en a DEUX seulement qui sont douées de paraboles surosculatrices, et ces deux peuvent être imaginaires.

Nota. — Je ne développe pas les calculs relatifs aux cas du cercle et de la parabole : premièrement, parce qu'il n'y a qu'à appliquer les principes exposés dans les précédents paragraphes; secondement, parce que les résultats correspondants ont été donnés autrefois dans un Mémoire *Sur la courbure des lignes et des surfaces*, présenté à l'Académie des Sciences (séance du 4 mai 1840), et dont un extrait a été inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville (1841).

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES;

PAR M. E. CATALAN.

Soit

(1) $$f(x) = af(bx) + \alpha\varphi(x),$$

a, b, α étant des constantes données.

Il résulte, de cette relation :

$$af(bx) = a^2 f(b^2 x) + a\alpha\varphi(bx),$$
$$a^2 f(b^2 x) = a^3 f(b^3 x) + a^2\alpha\varphi(b^2 x),$$
..................................,
$$a^{n-1} f(b^{n-1} x) = a^n f(b^n x) + a^{n-1}\alpha\varphi(b^{n-1} x);$$

puis

(2) $$f(x) = a^n f(b^n x) + \alpha[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \ldots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)].$$

On trouve, par un calcul semblable,

(3) $$\left\{\begin{aligned} af(bx) = & \frac{f\left(\frac{x}{b^n}\right)}{a^n} \\ & - \alpha\left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{b}\right) + \ldots + \frac{1}{a^{n-1}}\varphi\left(\frac{x}{b^{n-1}}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, *si le produit $a^n f(b^n x)$ tend vers une limite λ quand n augmente indéfiniment*, on conclut, de l'équation (2),

$$f(x) = \lambda + \alpha \lim[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \ldots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)].$$

Ainsi la série

$$\varphi(x) + a\varphi(bx) + a^2\varphi(b^2 x) + \ldots$$

est *convergente;* et l'on a

(A) $$\varphi(x) + a\varphi(bx) + a^2\varphi(b^2 x) + \ldots = \frac{f(x) - \lambda}{\alpha}.$$

Quand, au contraire, le produit $a^n f(b^n x)$ ne tend vers aucune limite, la série est *divergente* ou *indéterminée*.

De même, *si le rapport* $\dfrac{f\left(\dfrac{x}{b^n}\right)}{a^n}$ *a une limite* μ,

$$\text{(B)}\qquad \varphi(x)+\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\varphi\left(\frac{x}{b^2}\right)+\ldots=\frac{\mu-af(bx)}{\alpha}.$$

Les formules (A), (B), probablement connues, permettent de sommer certaines séries (*).

Applications.

Supposons que l'équation (1) soit :

$$1^\circ \qquad \sin x = 3\sin\tfrac{1}{3}x - 4\sin^3\tfrac{1}{3}x;$$

de manière que

$$f(x)=\sin x,\quad \varphi(x)=\sin^3\tfrac{1}{3}x,\quad a=3,\quad \alpha=-4,\quad b=\tfrac{1}{3}.$$

On a

$$\lambda=\lim\left[3^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right]=x,\quad \mu=\lim\frac{\sin(3^n x)}{3^n}=0;$$

et, en conséquence,

$$\text{(C)}\qquad \sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{3^2}+3^2\sin^3\frac{x}{3^3}+\ldots=\frac{x-\sin x}{4},$$

$$\sin^3\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{1}{3^2}\sin^3 3x+\ldots=\frac{3}{4}\sin\frac{x}{3},$$

ou plutôt

$$\text{(D)}\qquad \sin^3 x+\frac{1}{3}\sin^3 3x+\frac{1}{3^2}\sin^3 3^2x+\ldots=\frac{3}{4}\sin x.$$

(*) Je crois avoir communiqué à M. Gerono, il y a quelques mois, la formule (A).

2° $$\cos x = -3\cos\frac{x}{3} + 4\cos^3\frac{x}{3};$$

$$f(x) = \cos x,\quad \varphi(x) = \cos^3\frac{x}{3},\quad a = -3,\quad \alpha = 4,\quad b = \frac{1}{3}.$$

Le produit $(-3)^n\cos\frac{x}{3^n}$ croît indéfiniment avec n (en valeur absolue). Ainsi la série

$$\cos^3\frac{x}{3} - 3\cos^3\frac{x}{3^2} + 3^2\cos^2\frac{x}{3^3} - \ldots$$

est *divergente*.

Au contraire, $\lim\frac{\cos^3 3^n x}{(-3)^n} = \mu = 0$; donc, par le changement de x en $3x$,

(E) $$\cos^3 x - \frac{1}{3}\cos^3 3x + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 x - \frac{1}{3^3}\cos^3 3^3 x + \ldots = \frac{3}{4}\cos x.$$

Cette formule résout la question 987, proposée par M. Laisant.

3° $$\cot x = 2\cot 2x + \operatorname{tang} x;$$

$$f(x) = \cot x,\quad \varphi(x) = \operatorname{tang} x,\quad a = 2,\quad \alpha = 1,\quad b = 2.$$

Le produit $2^n\cot(2^n x)$ ne tend vers aucune limite; le rapport $\frac{\cot\frac{x}{2^n}}{2^n}$ a pour limite $\frac{1}{x}$; donc la formule (B) est seule applicable. Elle donne

(F) $$\operatorname{tang} x + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \ldots = \frac{1}{x} - \frac{2}{\operatorname{tang} 2x};$$

et, en particulier,

(G) $$\operatorname{tang}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{32} + \ldots = 2\left(\frac{4}{\pi} - 1\right).$$

4° $$\operatorname{arc\,tang} x = \operatorname{arc\,tang}(bx) + \operatorname{arc\,tang}\frac{(1-b)x}{1+bx^2}.$$

Si la constante b, supposée positive, est inférieure à l'unité, cette relation conduit à la formule

$$\text{(H)}\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tang}\frac{(1-b)x}{1+bx^2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{(1-b)bx}{1+b^3x^2} \\ &\qquad + \operatorname{arc\,tang}\frac{(1-b)b^2x}{1+b^5x^2} + \ldots = \operatorname{arc\,tang} x; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut, par exemple,

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang}\frac{2}{9} + \operatorname{arc\,tang}\frac{4}{33} + \ldots \\ &\qquad + \operatorname{arc\,tang}\frac{2^{n-1}}{2^{2n-1}+1} + \ldots = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right.$$

Au contraire, b étant plus grand que 1, on trouve

$$\text{(K)}\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tang}\frac{(b-1)x}{1+bx^2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{(b-1)bx}{1+b^3x^2} \\ &\qquad + \operatorname{arc\,tang}\frac{(b-1)b^2x}{1+b^5x^2} + \ldots = \operatorname{arc\,cot} x, \end{aligned}\right.$$

formule qui ne diffère pas de (H).

Liége, 23 février 1870.

NOTE SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. L. PAINVIN.

(Note communiquée à la rédaction en juillet 1865.)

M. Cremona a publié dans le *Journal de Crelle* (t. LXIV) une étude géométrique de l'hypocycloïde à trois rebroussements; la théorie générale des courbes

planes a permis à M. Cremona d'établir avec la plus grande élégance les théorèmes que Steiner avait énoncés sans démonstration sur cette courbe, et d'en faire connaître de nouvelles propriétés fort remarquables. Je me propose ici de montrer comment, en faisant intervenir simultanément les équations ponctuelles et les équations tangentielles, on peut arriver à démontrer, par l'analyse, les propositions principales renfermées dans le Mémoire de M. Cremona. Le mode de démonstration que j'ai adopté me conduisait naturellement à de nouvelles propriétés; je n'en ai signalé que quelques-unes.

§ 1. — *Définition de la courbe; formules préliminaires.*

1. *L'hypocycloïde à trois rebroussements est la courbe engendrée par un point d'un cercle mobile roulant intérieurement sur un cercle fixe dont le rayon est triple de celui du cercle mobile.*

Nous désignerons par x et y les coordonnées cartésiennes d'un point; en choisissant pour origine le centre du cercle fixe, pour axe des x une droite passant par un des points du cercle fixe avec lequel vient coïncider le point décrivant; pour axe des y une perpendiculaire à Ox dans le sens du mouvement du cercle. On trouve, pour les équations de l'hypocycloïde,

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a(2\cos\alpha + \cos 2\alpha), \\ y &= a(2\sin\alpha - \sin 2\alpha); \end{aligned} \right.$$

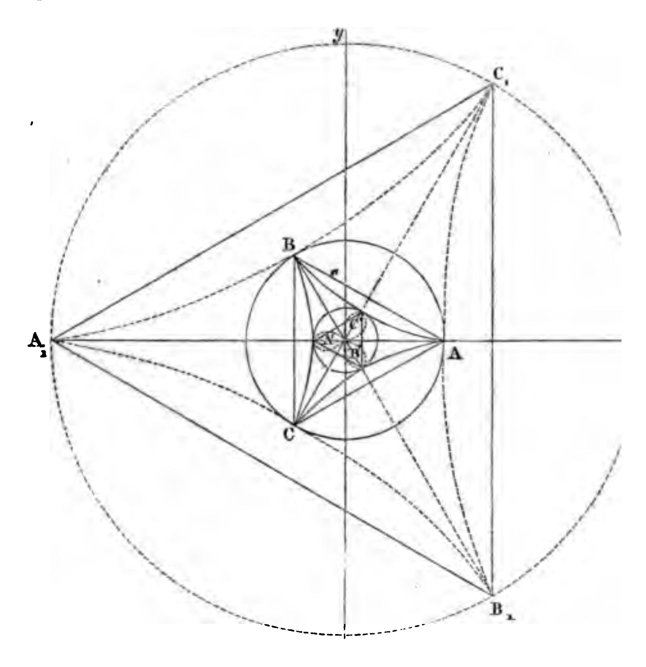
a est le rayon du cercle mobile, $3a$ sera celui du cercle fixe; α est l'angle avec Ox du rayon qui joint le centre du cercle fixe avec le centre du cercle mobile.

L'élimination de α entre les équations (I) nous conduit

à l'équation

(II) $(x^2+y^2)^2+8ax(3y^2-x^2)+18a^2(x^2+y^2)-27a^4$

c'est l'équation, en coordonnées cartésiennes, de l'h
cycloïde.



On trouvera sans difficulté que l'équation de la
gente à l'hypocycloïde au point défini par les égalité
est

(1) $$x \sin\frac{\alpha}{2}+y\cos\frac{\alpha}{2}=a\sin\frac{3\alpha}{2};$$

α est le paramètre angulaire du point de contact.

Les équations (I) et (II) nous permettent de cons
immédiatement les propriétés suivantes :

THÉORÈME I. — 1° *L'hypocycloïde a trois points sur le cercle fixe; ces trois points,* A, B, C, *sont les sommets d'un triangle équilatéral; ce sont trois points de rebroussement; les tangentes de rebroussement sont les rayons* OA, OB, OC. *Chaque tangente de rebroussement a un contact du premier ordre et rencontre la courbe en un second point à une distance* a *du centre.*

2° *La courbe est du quatrième ordre et de troisième classe; elle possède trois axes de symétrie qui sont les droites* OA, OB, OC.

3° *L'hypocycloïde est inscrite dans le cercle directeur* (*de rayon* $3a$), *et circonscrite au cercle concentrique de rayon* a.

4° *L'hypocycloïde n'a pas de point d'inflexion; elle possède une seule tangente double qui est la droite de l'infini; les points de contact de cette tangente double sont les points circulaires à l'infini.*

2. Nous allons maintenant chercher l'équation de la courbe lorsqu'on la rapporte au triangle ABC.

Désignons par X, Y, Z les distances d'un point quelconque du plan aux trois côtés du triangle ABC, on aura les formules suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} X = x + \dfrac{3a}{2}, \\ Y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{3a}{2}, \\ Z = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{3a}{2}, \end{cases}$$

qui permettent, dans le cas actuel, de passer des coordonnées *cartésiennes* x, y, aux coordonnées *trilatères* X, Y, Z, et inversement.

On déduit de ces formules

$$(3)\qquad X + Y + Z = \frac{9a}{2},$$

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{3a(2X - Y - Z)}{2(X + Y + Z)}, \\ y &= \frac{3a\sqrt{3}(Y - Z)}{(X + Y + X)}. \end{aligned} \right.$$

L'équation de la droite de l'infini est visiblement, dans le système actuel,

$$(5)\qquad X + Y + Z = 0.$$

La substitution des valeurs (4) dans l'équation (II) de la courbe nous conduit à l'équation suivante :

$$(\text{III})\qquad X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2 = 2XYZ(X + Y + Z);$$

c'est l'équation, en *coordonnées trilatères*, lorsqu'on prend le triangle ABC pour triangle de référence.

L'équation (III) peut encore s'écrire sous la forme qui suit :

$$(\text{III } bis)\qquad (XY + YZ + ZX)^2 = 4XYZ(X + Y + Z).$$

3. Pour obtenir l'*équation tangentielle* de l'hypocycloïde, nous prendrons l'équation (III), savoir :

$$(\text{III})\qquad X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2 = 2XYZ(X + Y + Z),$$

et nous chercherons la condition pour que la droite

$$(6)\qquad uX + vY + wZ = 0$$

soit tangente à cette courbe.

Pour cela rappelons-nous que la condition, pour que l'équation du quatrième degré

$$AX^4 + 4BX^3Y + 6CX^2Y^2 + 4DXY^3 + EY^4 = 0$$

ait deux racines égales, est

$$(AE - 4BD + 3C^2)^3 = 27(ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3)^2.$$

Éliminons Z entre les équations (6) et (III), puis appliquons à l'équation obtenue la relation ci-dessus, on trouve, pour la condition cherchée,

$$\text{(IV)} \qquad (u + v + w)^3 = 27uvw.$$

Mais les quantités u, v, w peuvent être regardées comme les coordonnées trilatères de la droite (6) par rapport au triangle ABC; et dans le système tangentiel actuel les paramètres de référence sont égaux entre eux (*Géométrie analytique*, n° 139); de sorte que l'équation (III) est l'*équation tangentielle* de l'hypocycloïde: ABC est toujours le triangle de référence. Les quantités u, v, w sont les distances des sommets A, B, C à une tangente quelconque, ou ces distances divisées par un même nombre.

4. Démontrons de suite cette proposition importante :

THÉORÈME II. — *Toute courbe de quatrième ordre et de troisième classe ayant la droite de l'infini pour tangente double aux points circulaires à l'infini est une hypocycloïde à trois rebroussements.* (Mémoire cité de M. CREMONA, n°s 8 *et* 9.)

Une courbe du quatrième ordre est, en général, de douzième classe; la diminution de la classe ne pouvant provenir que de la présence des points multiples, il faut que la courbe possède assez de points multiples pour que la diminution soit de 9 unités. Or un point triple ne peut jamais, dans une courbe du quatrième ordre, diminuer la classe de 9 unités, et, d'un autre côté, une courbe du quatrième ordre ne peut pas avoir, avec un point

triple, d'autre point multiple. Une courbe du quatrième ordre ne peut pas avoir quatre points doubles, car une conique, passant par ces quatre points et par un cinquième point pris arbitrairement sur la courbe, rencontrerait cette courbe en 9 points. Ainsi, la classe ne peut être diminuée de 9 unités que par la présence de trois points doubles, et le maximum de diminution aura lieu lorsque ces trois points doubles seront des points de rebroussement, auquel cas la diminution est égale à 9 unités. Ajoutons que ces trois points de rebroussement ne sauraient être en ligne droite, car, autrement, cette droite rencontrerait la courbe en 6 points; aucun des points de rebroussement ne peut être à l'infini, car alors la courbe ne pourrait pas avoir la droite de l'infini pour tangente double proprement dite.

Ainsi, la courbe en question a donc trois points de rebroussement A, B, C, à distance finie; prenons pour triangle de référence le triangle formé par ces trois points, et écrivons que les trois sommets sont trois points de rebroussement, l'équation de la courbe prendra nécessairement la forme suivante :

$$(1^\circ)\quad a^2Y^2Z^2 + b^2Z^2X^2 + c^2X^2Y^2 = 2XYZ(aX + bY + cZ).$$

Il faut exprimer maintenant que la droite de l'infini touche cette courbe aux points circulaires à l'infini.

Si A, B, C sont les angles du triangle de référence, l'équation du cercle circonscrit à ce triangle est

$$YZ\sin A + ZX\sin B + XY\sin C = 0,$$

et l'on a pour l'équation de la droite de l'infini

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = 0;$$

l'intersection de cette dernière droite avec le cercle donne les points circulaires à l'infini.

Mais l'équation générale des courbes du quatrième ordre touchées aux points circulaires à l'infini par la droite de l'infini pourra évidemment se mettre sous la forme suivante :

$$(2^\circ)\quad \left\{ \begin{aligned} &(YZ\sin A + ZX\sin B + XY\sin C)^2 \\ &\quad = (X\sin A + Y\sin B + Z\sin C) \\ &\qquad \times (a_1 X^3 + b_1 Y^3 + c_1 Z^3 + a' X^2 Y + a'' X^2 Z \\ &\qquad\quad + b' Y^2 X + b'' Y^2 Z + c' Z^2 X + c'' Z^2 Y + 2h XYZ). \end{aligned} \right.$$

Identifions les équations (2°) et (1°), et remarquons que les quantités $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, sont positives, on est très-facilement conduit aux conditions définitives :

$$(3^\circ)\qquad a = b = c,\quad \sin A = \sin B = \sin C.$$

Il résulte de là que l'équation de la courbe satisfaisant à toutes les conditions énoncées est nécessairement

$$(4^\circ)\qquad X^2 Y^2 + Y^2 Z^2 + Z^2 X^2 = 2XYZ(X + Y + Z),$$

et le triangle de référence est un triangle équilatéral; ce qui démontre complétement le théorème en question.

5. Citons encore une proposition générale et remarquable :

THÉORÈME III. — *Considérons un triangle fixe* ABC, *et une transversale quelconque; si la transversale est telle, que les perpendiculaires aux divers côtés du triangle aux points où elle les rencontre soient concourantes, cette transversale enveloppera une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Soit l'équation de la transversale

$$(1^\circ)\qquad uX + vY + wZ = 0;$$

les équations des perpendiculaires aux côtés du triangle

aux points où ils sont rencontrés par la transversale sont respectivement

$$(v\cos C + w\cos B)\,x + vy + wz = 0,$$
$$ux + (w\cos A + u\cos C)\,y + wz = 0,$$
$$ux + vy + (u\cos B + v\cos A)\,z = 0.$$

On exprimera que ces trois droites sont concourantes en éliminant x, y, z entre ces trois équations, ce qui donne

$$(2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} F = {} & vw\sin^2 A\,(v\cos C + w\cos B) \\ & + wu\sin^2 B\,(w\cos A + u\cos C) \\ & + uv\sin^2 C\,(u\cos B + v\cos A) \\ & - 2uvw(1 + \cos A\cos B\cos C) = 0: \end{aligned}\right.$$

c'est l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites (1°).

Les coordonnées de la droite de l'infini sont

$$(3^\circ)\qquad \frac{u}{\sin A} = \frac{v}{\sin B} = \frac{w}{\sin C};$$

or on constate immédiatement que ces valeurs satisfont aux équations

$$\frac{dF}{du} = 0, \quad \frac{dF}{dv} = 0, \quad \frac{dF}{dw} = 0;$$

la droite de l'infini est donc une tangente double. (*Géométrie analytique,* nos 452 et suiv.)

Les points de contact de la tangente double sont donnés par l'équation

$$u^2\frac{d^2F}{du_0^2} + v^2\frac{d^2F}{dv_0^2} + w^2\frac{d^2F}{dw_0^2}$$
$$+ 2vu\frac{d^2F}{du_0\,dv_0} + 2uw\frac{d^2F}{du_0\,w_0} + 2vw\frac{d^2F}{dv_0\,dw_0} = 0;$$

et on trouve, dans le cas actuel,

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2vw\cos A - 2uw\cos B - 2uv\cos C = 0,$$

équation qui représente les deux points circulaires à l'infini, puisque les paramètres de référence sont $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$. (*Géométrie analytique*, nos 139, 297.)

La courbe (2°) étant de troisième classe et ayant une tangente double, il en résulte qu'elle ne peut pas avoir de tangente d'inflexion, ni d'autre tangente multiple; la formule

$$m = n(n+1) - 2\tau - 3\iota$$

nous donne donc $m = 4$, puisque $n = 3$, $\tau = 1$, $\iota = 0$. Ainsi la courbe (2°) est de quatrième ordre et de troisième classe; la droite de l'infini la touche aux points circulaires à l'infini : c'est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements (Théorème II).

On peut encore se proposer de déterminer la position des trois points de rebroussement par rapport au triangle ABC.

On constatera sans difficulté, pour la courbe qui nous occupe, que :

Théorème IV. — *L'hypocycloïde est l'enveloppe de la droite qui joint les projections d'un point quelconque de la circonférence, concentrique au cercle directeur et de rayon* $2a$, *sur les côtés du triangle équilatéral inscrit et ayant ses sommets sur les rayons* OA, OB, OC.

(*La suite prochainement.*)

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. E. LINDELÖF.

(*Comptes rendus de la Société des Sciences de Finlande*, à Helsingfors, 27 janvier 1868.)

---

1. *Dans un triangle plan donné, inscrire un autre triangle de périmètre minimum.*

Soient A, B, C, a, b, c les angles et les côtés du triangle donné, et A′, B′, C′, a', b', c' les angles et les côtés du triangle inscrit demandé. La question consiste à déterminer, sur les trois droites a, b, c, trois points A′, B′, C′, tels que la somme des droites qui les joignent

$$a' + b' + c'$$

soit un minimum.

Admettons pour un instant que les points B′ et C′ soient déjà connus, et que l'on cherche à déterminer la position du point A′ sur la ligne a, de manière que la somme des distances A′B′, A′C′, savoir : $b' + c'$, soit un minimum. Faisons glisser le point A′ sur la ligne BC d'une quantité infiniment petite ds; les distances A′C′ et A′B′ prendront alors les accroissements

$$ds.\cos \mathrm{BA'C'}, \quad - ds.\cos \mathrm{CA'B'},$$

dont la somme devra être nulle pour que le minimum puisse avoir lieu. Il s'ensuit de là que les angles BA′C′ et CA′B′, c'est-à-dire les angles que font de part et d'autre, au point A′, les côtés b', c' du triangle inscrit avec le côté a du triangle donné, sont égaux entre eux. Par la même raison, les angles formés en chacun des points B′ et C′, par les côtés du triangle intérieur avec ceux du triangle extérieur sont aussi égaux entre eux.

En désignant maintenant par x l'un des deux angles égaux en A', par y l'un des deux angles égaux en B', et par z l'un des deux angles égaux en C', on a

$$A + y + z = \pi,$$
$$B + z + x = \pi,$$
$$C + x + y = \pi;$$

d'où

$$A + B + C + 2(x + y + z) = 3\pi,$$

ou

$$x + y + z = \pi.$$

Cette équation, comparée avec les trois premières, donne

$$x = A, \quad y = B, \quad z = C,$$

d'où il suit que les trois angles du triangle inscrit sont

$$A' = \pi - 2A, \quad B' = \pi - 2B, \quad C' = \pi - 2C.$$

Les côtés étant entre eux comme les sinus des angles opposés, on a par conséquent

$$\frac{a'}{\sin A \cos A} = \frac{b'}{\sin B \cos B} = \frac{c'}{\sin C \cos C}.$$

Mais on a aussi, d'autre part,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

La combinaison de ces formules donne

$$\frac{a'}{a \cos A} = \frac{b'}{b \cos B} = \frac{c'}{c \cos C} = m,$$

le rapport m étant, pour le moment, inconnu. Pour déterminer ce rapport, je projette sur $B'C'$ les deux autres côtés du triangle $AB'C'$, sur $C'A'$ les deux autres côtés du triangle $BC'A'$, et sur $A'B'$ les deux autres côtés du

triangle $CA'B'$. La somme de ces projections sera

$$a' + b' + c' = a\cos A + b\cos B + c\cos C.$$

En comparant cette formule aux précédentes, on trouve $m = 1$, et par suite

$$a' = a\cos A,\quad b' = b\cos B,\quad c' = c\cos C.$$

Il est facile maintenant de calculer les segments déterminés par les points A', B', C' sur les côtés du triangle donné. On trouve, par exemple,

$$A'B : b' = \sin C : \sin B = c : b,$$

d'où

$$A'B = \frac{b'c}{b} = c\cos B,$$

ce qui prouve que la ligne AA' est perpendiculaire sur le côté a. Les points cherchés, A', B', C', ne sont donc autre chose que *les pieds des hauteurs du triangle donné*.

La proposition qu'on vient de démontrer a sa réciproque. Si les lignes AA', BB', CC' sont perpendiculaires aux côtés a, b, c, les points B' et C' se trouveront sur la circonférence d'un cercle décrit sur le côté a comme diamètre, et l'on a par conséquent

$$AB.AC' = AC.AB',$$

ou

$$AB : AC = AB' : AC',$$

d'où l'on voit que le triangle $A'B'C'$ est semblable au triangle ABC. Il en est de même des triangles $BC'A'$ et $CA'B'$. On en conclut que les côtés du triangle inscrit forment des angles égaux deux à deux avec les côtés du triangle donné; or, c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que le périmètre du triangle inscrit soit un minimum.

Nous résoudrons de la même manière le problème analogue :

2. *Dans un triangle sphérique donné inscrire un autre triangle sphérique dont le périmètre soit un minimum.*

Désignons les côtés et les angles des deux triangles de la même manière que dans le problème précédent. On trouvera, comme dans le premier cas, que la condition du minimum consiste encore en ce que les côtés du triangle inscrit doivent faire deux à deux des angles égaux avec les côtés du triangle donné. Nous allons démontrer que cette condition sera remplie lorsque les arcs de grand cercle AA', BB', CC' seront perpendiculaires sur les côtés a, b, c du triangle donné.

Pour abréger, introduisons les nouvelles notations suivantes : $AA' = l$, $BB' = m$, $CC' = n$, $BA' = u$, $BC' = v$, l'angle $BA'C' = x$. On trouve alors les équations

$$\tang u = \tang c \cos B,$$
$$\tang v = \tang a \cos B.$$

On a, de plus, entre les quatre éléments consécutifs x, u, B, v du triangle BC'A', la relation connue

$$\cot x \sin B + \cos B \cos u = \sin u \cot v,$$

d'où l'on tire successivement, à l'aide des formules précédentes,

$$\sin B \cot x = \cos u \left(\frac{\tang u}{\tang v} - \cos B\right),$$
$$= \cos u \left(\frac{\tang c}{\tang a} - \cos B\right),$$
$$= \frac{\cos u}{\sin a \cos c}(\sin c \cos a - \cos c \sin a . \cos B),$$
$$= \frac{\cos u}{\sin a \cos c} \sin b \cos A.$$

D'autre part, le triangle $AA'B$ donne

$$\cos c = \cos u \cos l,$$

ce qui réduit notre formule à

$$\sin B \cot x = \frac{\sin b \cos A}{\sin a \cos l} = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos l},$$

d'où l'on tire finalement

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} A \cos l.$$

Ici x désigne l'angle compris entre les côtés b' et a; mais le résultat resterait encore le même si x désignait l'angle compris entre c' et a. Les deux côtés b' et c' du triangle inscrit ont par conséquent la même inclinaison sur le côté a au point A', et le même raisonnement démontre que pareille chose a lieu aux points B' et C'.

PROBLÈMES D'EXAMEN;

Par M. HERMANN,

Ancien Élève de l'École Normale.

---

1. *Trouver le plus grand coefficient du développement de la puissance $m^{ième}$ d'un binôme.*

Le terme général du développement de la puissance $m^{ième}$ d'un binôme est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} a^n x^{m-n}.$$

On le déduit du précédent en le multipliant par

$$\frac{m-n+1}{n}\,\frac{a}{x}.$$

Par conséquent, les termes iront en croissant tant que l'on aura

$$\frac{m-n+1}{n}\frac{a}{x} > 1,$$

$$n < \frac{m+1}{a+x}.$$

Par conséquent, le terme maximum sera le terme dans lequel n sera remplacé par le plus grand nombre entier contenu dans

$$\frac{m+1}{a+x}.$$

Si le quotient de $m+1$ par $a+x$ est un nombre entier, il y a deux termes égaux dans le développement.

2. *Minimum du produit*

$$1.2\ldots x.1.2\ldots y.1.2\ldots z.1.2\ldots t\ldots$$

dans lequel les variables x, y, z, t,..., en nombre n, ont une somme constante et égale à m.

Théorème. — *Si l'on divise m par n et si q et r sont le quotient et le reste; le produit sera minimum si l'on prend $n-r$ des variables égales à q, et r égales à $q+1$.*

Ce théorème peut être considéré comme la conséquence des deux lemmes suivants, que je commencerai par démontrer.

Lemme I. — Si deux quantités entières, x et y, ont une somme paire égale à $2k$, le produit

(1) $$1.2\ldots x.1.2\ldots y$$

est plus grand que le produit

(2) $$1.2\ldots k.1.2\ldots k;$$

car si l'on a

$$y = x + a,$$

d'où

$$k = x + \frac{a}{2},$$

le produit (2) peut s'écrire

$$1.2\ldots\left(x + \frac{a}{2}\right)1.2\ldots\left(x + \frac{a}{2}\right),$$

et le produit (1)

$$1.2\ldots x.1.2\ldots(x + a);$$

les facteurs $x+1, x+2,\ldots, x+\frac{a}{2}$ sont remplacés dans (1) par

$$x + \frac{a}{2} + 1, \quad x + \frac{a}{2} + 2, \quad x + a;$$

donc le produit (1) est plus grand que le produit (2).

Lemme II. — Si deux quantités entières, x et y, ont une somme impaire égale à $2k+1$, le produit

$$1.2\ldots k.1.2\ldots y$$

est plus grand que le produit

$$1.2\ldots k.1.2\ldots(k+1).$$

Le théorème énoncé est la conséquence immédiate de ces deux lemmes. Il en résulte immédiatement que, dans le produit minimum, deux facteurs ne sauraient différer de plus d'une unité. Par conséquent, les facteurs du produit sont égaux à q ou à $q+1$. Soit a le nombre des facteurs égaux à $q+1$. On aura

$$aq + b(q+1) = m,$$
$$a + b = n,$$
$$m = nq + r.$$

On déduit de ces relations

$$a = n - r, \quad b = r.$$

3. *Trouver le plus grand coefficient de la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme.*

Soit n le nombre des termes du polynôme, et soit

$$m = nq + r;$$

le plus grand coefficient est

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots x.1.2\ldots y.1.2\ldots z},$$

dans lequel $n - r$ des quantités x, y, z sont égales à q et r égales à $q+1$.

4. *Trouver le plus grand terme de la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme.*

Théorème. — *Le plus grand terme du développement de la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme est*

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha_1.1.2\ldots\beta_1.1.2\ldots\gamma_1} a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \frac{a}{\alpha_1+1}\,\frac{a}{\alpha_1+2}\cdots\frac{p}{\alpha_1+p}$$
$$\times \frac{b}{\beta_1+1}\,\frac{b}{\beta_1+2}\cdots\frac{b}{\beta_1+q}\cdots$$

dans lequel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ représentent les résultats que l'on obtient en partageant m en parties proportionnelles à a, b, c, et en ne prenant que les parties entières des résultats, et dans lequel les fractions

$$\frac{a}{\alpha_1+1},\quad \frac{a}{\alpha_1+2},\ldots,\quad \frac{a}{\alpha_1+p},$$

où A et q sont entiers et positifs. On aura

$$Aq = m.D + r_1,\ Aq^2 = m.D + r_2, \ldots,\ Aq^n = m.D + r_n, \ldots$$

Donc, dans toute relation établissant un caractère de divisibilité par D, on pourra remplacer respectivement Aq, $Aq^2, \ldots, Aq^n, \ldots$ par $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ et inversement.

2. Si l'on a

$$\text{(I)} \qquad \alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots + \alpha_p q^p = m.D,$$

il viendra, en multipliant par Aq^n,

$$\alpha_0 Aq^n + \alpha_1 Aq^{n+1} + \ldots + \alpha_p Aq^{n+p} = m.D,$$

et, par suite, d'après la remarque précédente,

$$\text{(II)} \qquad \alpha_0 r_n + \alpha_1 r_{n+1} + \ldots + \alpha_p r_{n+p} = m.D.$$

Ainsi, toutes les fois qu'on aura la relation (I), on pourra en conclure la relation (II), qui aura lieu quel que soit n; et réciproquement, lorsque cette dernière existera pour une certaine valeur de n, pourvu que Aq^n soit premier avec D, il en sera de même pour toute autre valeur, et on pourra en déduire la relation (I).

Dans ces relations, il est clair qu'on peut remplacer D par un quelconque d de ses diviseurs, car tout multiple de D le sera aussi de d.

Ces remarques permettent déjà de trouver des lois en grand nombre, auxquelles satisfont les restes provenant d'un diviseur donné, et réciproquement de trouver les diviseurs qui peuvent fournir des restes satisfaisant à une loi déterminée, analogue à la relation (II) ci-dessus.

Ainsi, supposons $q = 10$. Soit $D = 17$: on a

$$2.10 - 3 = m.17,\ 5.10 + 1 = m.17,\ 10^2 + 2.10 - 1 = m.17.$$

Donc aussi

$$2r_{n+1} - 3r_n = m.17, \quad 5r_{n+1} + r_n = m.17,$$
$$r_{n+2} + 2r_{n+1} - r_n = m.17,$$

résultats qu'on vérifierait sans peine.

De même, si l'on demande les diviseurs, tels que l'on ait

$$r_{n+3} - r_{n+2} - r_n = m.\mathrm{D},$$

il suffit de former le nombre $10^3 - 10^2 - 1 = 899$ et ses diviseurs 29 et 31. Ces trois nombres satisfont à la question.

Enfin, ces remarques permettent de former immédiatement des multiples d'un nombre donné, et réciproquement de vérifier si un nombre est divisible par un autre. Ainsi, dans l'exemple précédent, on trouve les trois restes consécutifs 4, 6, 9, qui satisfont à la relation

$$2.9 + 2.6 + 1.4 = 34 = m.17.$$

Donc

$$2.10^2 + 2.10 + 1 = 221 = m.17.$$

En outre, supposons qu'on veuille savoir si 153 est ou non multiple de 17. Je prends trois restes consécutifs, les mêmes que ci-dessus, par exemple, et je forme l'expression

$$1.9 + 5.6 + 3.4 = 51 = m.17.$$

Donc

$$153 = m.17.$$

3. Si la relation qu'on se donne est $r_{n+p} - r_n = 0$, c'est-à-dire si les restes doivent se reproduire périodiquement de p en p, on voit que $q^p - 1$ doit être un multiple du diviseur, résultat connu auquel on est directement amené ici. Nous aurons occasion plus loin d'étudier particulièrement ces restes périodiques.

4. Si le diviseur D s'écrit $\alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0$ dans l
système de numération dont la base est q, on a

$$D = \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \ldots + \alpha_1 q + \alpha_0,$$

et par suite (2)

$$\text{(III)} \quad \alpha_p r_{n+p} + \alpha_{p-1} r_{n+p-1} + \ldots + \alpha_1 r_{n+1} + \alpha_0 r_n = m.D.$$

Ainsi, *écrivant un nombre de restes consécutifs quelconques, égal à celui des chiffres du diviseur, plaçan respectivement au-dessous les chiffres du diviseur dan leur ordre inverse et effectuant les produits indiqués, l somme de ces produits sera un multiple du diviseur.*

Par exemple, 134, appliqué comme diviseur aux puissances successives de 10, donne lieu aux trois restes consécutifs

	62	84	36
J'écris au-dessous	4	3	1
et	248	+ 252	+ 36 = 536 = m . 134.

Il est évident, d'après ce qui précède, que la mêm propriété subsisterait en désignant par $\alpha_p, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ le chiffres d'un multiple quelconque de D.

Enfin, comme rien ne suppose dans notre raisonnement que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ soient plus petits qu la base q, on voit que, dans le cas pris ci-dessus pou exemple, on peut écrire

$$134 = 1 . 10^2 + 34 . 10^0,$$

ou

$$134 = 13 . 10 + 4 . 10^0,$$

d'où résulte que les chiffres du diviseur peuvent être di posés au-dessous des restes des deux manières suivante écrites, pour plus de commodité, dans l'ordre inverse

précédent, qui est l'ordre direct des chiffres du diviseur :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ccc} 36 & 84 & 62 \\ 1 & 0 & 34 \end{array}\right.$$

$$36 + 0 + 2108 = 2144 = m.134$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ccc} 36 & 84 & 62 \\ 0 & 13 & 4 \end{array}\right.$$

$$0 + 1072 + 248 = 1340 = m.134$$

Par suite, ***ayant écrit les restes par ordre d'indices décroissants de gauche à droite et les chiffres d'un multiple quelconque du diviseur au-dessous, comme on l'a vu précédemment, on peut déplacer ceux-ci de manière à les masser*** **SUR LA DROITE**, ***à*** *volonté,* ***sans*** *que* ***la*** *propriété cesse d'être vraie.*

5. ***Si la base du système de numération est*** B, ***différent de*** q, ***et qu'on divise successivement*** Aq, Aq^2,... ***par un diviseur quelconque*** D ***de*** $q - B$, ***la même propriété aura lieu.*** Car soit

$$D = \frac{q - B}{N},$$

d'où

$$q = N.D + B,$$

et

$$q^2 = m.D + B^2, \ldots, q^n = m.D + B^n, \ldots.$$

De là

$$\begin{array}{lll} Aq^n = m.D + AB^n, & \text{et} & r_n = m.D + AB^n, \\ Aq^{n+1} = m.D + AB^{n+2}, & & r_{n+1} = m.D + AB^{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Aq^{n+p} = m.D + AB^{n+p}, & & r_{n+p} = m.D + AB^{n+p}. \end{array}$$

Multipliant respectivement par α_0, α_1,..., α_p, et ajoutant, on tombe sur la relation (III).

On verrait, d'une manière semblable, ***que les divisions*** *successives* Aq, Aq^2,... *par un diviseur de* $q+B$ *conduisent à une loi analogue, dans laquelle il faudrait seulement* ALTERNER LES SIGNES DES TERMES, *ou, ce qui revient au même,* PRENDRE ALTERNATIVEMENT LES RESTES PAR DÉFAUT ET PAR EXCÈS, *en leur conservant le signe* $+$.

On pourrait ici encore masser les chiffres sur la droite, ou en général du côté des puissances les plus faibles de la base, à la condition de conserver à chaque emplacement de chiffres dont on se sert le signe $+$ ou $-$ dont il était primitivement affecté. Ainsi, en divisant par $10+7=17$, les puissances successives de 7, on obtient les restes successifs 7, 15, 3,.... Si je prends un multiple quelconque de 17, tel que 153, et que j'écrive

	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{15}$	$\overset{+}{7}$
puis			
	1	5	3

j'aurais un multiple de 17 en faisant la somme des produits indiqués avec leurs signes. Je pourrais aussi bien écrire

	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{15}$	$\overset{+}{7}$
	1	0	53
ou bien			
	$\overset{+}{3}$	$\overset{-}{15}$	$\overset{+}{7}$
	0	15	3

et encore, en prenant les restes par excès et par défaut,

3	2	7
$\underline{1}$	$\underline{5}$	$\underline{3}$
3	2	7
$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{53}$
3	2	7
$\underline{0}$	$\underline{15}$	$\underline{3}$

on arriverait toujours ainsi à des multiples de 17. Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de cette règle, qui résulte de ce que rien ne suppose les chiffres employés inférieurs à la base du système de numération. Elle est d'ailleurs applicable aux propriétés analogues que nous allons étudier maintenant.

6. Soit toujours la progression $Aq, Aq^2, Aq^3, \ldots$. *Si l'on en divise les termes successifs par un diviseur quelconque* D *de* $Bq-1$, B *étant la base du système de numération employée, et qu'on écrive sous des restes consécutifs quelconques les divers chiffres de* D DANS LEUR ORDRE NATUREL, *la somme des produits indiqués sera un multiple de* D.

Soit, en effet,

$$D = \frac{Bq-1}{N};$$

de là

$$B = \frac{ND+1}{q}.$$

Soient, en outre, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les divers chiffres de D, de telle sorte qu'on ait

$$D = \alpha_n B^n + \alpha_{n-1} B^{n-1} + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0.$$

Si nous substituons à B sa valeur précédente, il vient

$$D = \alpha_n \frac{(ND+1)^n}{q^n} + \alpha_{n-1} \frac{(ND+1)^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + \alpha_1 \frac{(ND+1)}{q} + \alpha_0,$$

$$q^n D = \alpha_n (ND+1)^n + \alpha_{n-1} (ND+1)^{n-1} + \ldots + \alpha_1 (ND+1) q^{n-1} + \alpha_0 q^n.$$

Réunissant, dans le second membre, tous les multiples de D, après qu'on a effectué tous les développements,

$$\alpha_n + \alpha_{n-1} q + \ldots + \alpha_1 q^{n-1} + \alpha_0 q^n = m.D.$$

D'où multipliant par Aq^p, p étant quelconque,

$$\alpha_n A q^p + \alpha_{n-1} A q^{p+1} + \ldots + \alpha_1 A q^{p+n-1} + \alpha_0 A q^{p+n} = m.D.$$

Si l'on remplace à présent $Aq^p \ldots$ par $r_p, \ldots$, suivant la remarque faite au n° 1, il vient

$$\alpha_n r_p + \alpha_{n-1} r_{p+1} + \ldots + \alpha_1 r_{p+n-1} + \alpha_0 r_{p+n} = m.D;$$

c'est présisément l'égalité en démonstration.

Un calcul semblable ferait voir qu'*en prenant pour* D *un diviseur quelconque de* $Bq+1$, *on aurait une propriété analogue à la condition de* PRENDRE ALTERNATIVEMENT LES RESTES AVEC LES SIGNES + OU —, OU PAR EXCÈS ET PAR DÉFAUT SUCCESSIVEMENT, *comme plus haut.*

De plus, on verrait facilement que les mêmes propriétés subsisteraient en écrivant à la place des chiffres de D ceux d'un multiple quelconque de D.

7. *Si* B *étant toujours la base du système de numération, on prend comme diviseur un sous-multiple quelconque de* $q^p - B$, *on aura une propriété analogue à celle du n°* 5; *seulement, au lieu de prendre des restes consécutifs, on devra écrire des restes* SE SUIVANT DE p EN p. En effet, soient

$$D = \frac{q^p - B}{N}$$

et en outre

$$D = \alpha_n B^n + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0,$$

on aura

$$q^p = ND + B.$$

De là

$$q^{2p} = m.D + B^2,$$
$$q^{3p} = m.D + B^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$q^{np} = m.D + B^n.$$

Multipliant toutes ces égalités respectivement par $\alpha_1 A q^m$, $\alpha_2 A q^m, \ldots, a_n A q^m$, et les ajoutant entre elles et avec l'identité $\alpha_0 A q^m = A q^m \alpha_0$, il vient

$$\alpha_0 A q^m + \alpha_1 A q^{m+p} + \alpha_2 A q^{m+2p} + \ldots + \alpha_n A q^{m+np} = m.D.$$

Remplaçant maintenant $A q^m$, $A q^{m+p}, \ldots$ par r_m, $r_{m+p}, \ldots$, on a la relation en démonstration

$$\alpha_0 r_m + \alpha_1 r_{m+p} + \alpha_2 r_{m+2p} + \ldots + \alpha_n r_{m+np} = m.D.$$

La division par $\dfrac{q^p + B}{N}$ *donnerait lieu à une propriété analogue*, EN PRENANT SUCCESSIVEMENT LES RESTES PAR EXCÈS ET PAR DÉFAUT.

Enfin, en prenant pour diviseur $\dfrac{Bq^p - 1}{N}$ *ou* $\dfrac{Bq^p + 1}{N}$, *on aurait deux propriétés analogues à celles du n° 6, avec cette même restriction que* LES RESTES DEVRAIENT ÊTRE PRIS DE p EN p *et non pas consécutifs.*

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 240

(voir 1re série, t. X, p. 347);

PAR M. E. PELLET,
Élève au lycée de Nîmes.

La position d'équilibre d'un corps surnageant n'a lieu que lorsque la distance du centre de gravité du liquide déplacé au centre de gravité du corps est un maximum, ou bien encore lorsque le centre commun de gra-

vité du corps et du fluide déplacé est à sa plus haute ou plus basse position. (CLAUSEN.)

Chercher la position d'équilibre d'un corps flottant revient à déterminer un plan tel que : 1° l'une des parties en lesquelles il divise le corps ait un volume donné; 2° qu'il soit perpendiculaire sur la ligne qui joint le centre de gravité de cette partie, considérée comme homogène, au centre de gravité G du corps, qui peut être de nature hétérogène.

Pour que la première condition soit satisfaite, il faut que le plan soit tangent à une certaine surface S. Soit M un point de cette surface; P le plan tangent en ce point à la surface S; M′ le centre de gravité du segment déterminé par ce plan, ayant le volume donné. Le point M décrivant la surface S, le point M′ décrit une surface S′. Le plan tangent en M′ à cette dernière surface est parallèle au plan P. En effet soit (m, p, m') une seconde position du point M, du plan P et du point M′. Les segments déterminés par les plans P et p ont une partie commune qui a un volume V et dont le centre de gravité est en Γ; les parties non communes ont un volume égal v, et leur centre de gravité respectivement en g et g'. Le point M′ est sur la droite Γg; et m' sur la droite $\Gamma g'$; et l'on a

$$\frac{\Gamma M'}{\Gamma g} = \frac{\Gamma m'}{\Gamma g'} = \frac{v}{V+v}.$$

Ainsi la droite $M'm'$ est parallèle à la droite gg'. A la limite, cette dernière est contenue dans le plan P; donc puisqu'alors $M'm'$ est tangente à S′, les tangentes à la surface S′ menées par le point M′ sont parallèles au plan P, ce qui démontre ce que j'ai avancé. Ainsi la droite M′G, devant être perpendiculaire sur le plan P dans la position d'équilibre, cette droite est normale à la surface S′; et par conséquent la distance M′G est maximum ou minimum.

Désignons par M'', le centre de gravité du second segment déterminé par P. Le lieu des points M'' est une seconde surface S'', telle que le plan tangent en M'' à cette surface est parallèle au plan P. Si le corps est homogène, la droite M'M'' passe par le centre de gravité G du corps; de sorte que, dans la position d'équilibre, la droite M'G est aussi normale à la surface S''. Si le point M' se confond avec G, le point M'' se trouve sur la surface du corps, et alors la droite M'GM'' est normale à cette surface. La distance du point G à la surface du liquide est donc alors maximum ou minimum.

Question 615

(voir 2e série, t. I, p. 155);

PAR M. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

Soient une progression arithmétique de différence δ_1, *et une série arithmétique d'ordre* m_1, *déduite de cette progression; soient une seconde progression arithmétique de différence* δ_2, *et une série arithmétique déduite et d'ordre* m_2; *et ainsi de suite jusqu'à la série d'ordre* m_n;

Si l'on multiplie ensemble les premiers termes de ces séries, de même les seconds termes, etc., on obtient une série arithmétique d'ordre $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, *déduite d'une progression arithmétique à différence,*

$$\frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)^!}{m_1^! \, m_2^! \ldots m_n^!} \, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n.$$

(BÖKLEN) (*).

(*) Une faute d'impression a rendu inintelligible l'énoncé des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

1. m étant un entier absolu autre que zéro, on appelle série arithmétique de l'ordre m, une série dont les différences d'ordre m ont une même valeur non nulle δ, et l'on dit que cette série est déduite de la progression arithmétique à différence δ.

2. Représentons par

$$v_0, v_1, \ldots, v_p, \ldots$$

les termes consécutifs d'une série arithmétique d'ordre m; on peut les considérer comme étant les valeurs successives que prend une même fonction entière d'une variable x, quand on fait croître celle-ci à partir de zéro par des différences égales à 1.

Si v_x représente cette fonction, on a, en vertu des premiers principes du calcul aux différences,

$$v_x = v_0 + \Delta v_0 \frac{x}{1} + \Delta^2 v_0 \frac{x}{1}\frac{x-1}{2} + \ldots$$
$$+ \Delta^m v_0 \frac{x}{1}\frac{x-1}{2}\cdots\frac{x-m+1}{m}.$$

Le deuxième membre est une fonction entière du degré m où le coefficient de la plus haute puissance est $\frac{\Delta^m v_0}{m^!}$.

La série arithmétique ayant pour terme général v_x est déduite de la progression arithmétique ayant pour différence la constante non nulle $\Delta^m v_0$.

3. En vertu des mêmes principes, toute fonction entière

$$A_p + A_{p-1}x + \ldots + A_0 x^p,$$

de degré p d'une variable entière x qu'on fait croître à partir de 0 par degrés égaux à 1, a pour différence d'ordre p la constante $p^! A_0$; cette fonction est le terme géné-

ral d'une série arithmétique d'ordre p déduite de la progression arithmétique à différence $p^1 A_0$.

4. Désignons par

$${}_1u_x,\ {}_2u_x,\ \ldots,\ {}_hu_x,\ \ldots,\ {}_nu_x$$

les termes généraux de séries arithmétiques d'ordres

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_h,\ \ldots,\ m_n;$$

ces séries sont déduites de progressions arithmétiques à différences

$$\Delta^{m_1}{}_1u_0,\ \Delta^{m_2}{}_2u_0,\ \ldots,\ \Delta^{m_h}{}_hu_0,\ \ldots,\ \Delta^{m_n}{}_nu_0.$$

En vertu du paragraphe 2, on a

$${}_1u_x = {}_1u_0 + \Delta\,{}_1u_0 \frac{x}{1} + \Delta^2\,{}_1u_0 \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2} + \ldots$$
$$+ \Delta^{m_1}\,{}_1u_0 \frac{x}{1} \cdots \frac{x-m_1+1}{m_1},$$

$${}_hu_x = {}_hu_0 + \Delta\,{}_hu_0 \frac{x}{1} + \Delta^2\,{}_hu_0 \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2} + \ldots$$
$$+ \Delta^{m_h}\,{}_hu_0 \frac{x}{1} \cdots \frac{x-m_h+1}{m_h},$$

$${}_nu_x = {}_nu_0 + \Delta\,{}_nu_0 \frac{x}{1} + \Delta^2\,{}_hu_0 \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2} + \ldots$$
$$+ \Delta^{m_n}\,{}_nu_0 \frac{x}{1} \cdots \frac{x-m_n+1}{m_n}.$$

5. Soit x le terme général d'une série dont chaque terme est le produit des termes de même rang dans les séries arithmétiques du n° 4; on a

$$x = {}_1u_x + {}_2u_x + \ldots + {}_hu_x + \ldots + {}_nu_x.$$

En vertu des identités du n° 4, x est une fonction entière de degré $m_1 + \ldots + m_h + \ldots + m_n$, où le coefficient de

la plus haute puissance est $\frac{1}{m_1^! \, m_2^! \ldots m_n^!} \Delta^{m_1}{}_1 u_0 \ldots \Delta^{m_n}{}_n u_0$;
donc, en vertu du paragraphe 3, x est le terme général d'une série arithmétique d'ordre $m_1 + \ldots + m_h + \ldots + m_n$ déduite de la progression arithmétique à différence

$$\frac{(m_1 + \ldots + m_h + \ldots + m_n)^!}{m_1^! \ldots m_h^! \ldots m_n^!} \Delta^{m_1}{}_1 u_0 \ldots \times \Delta^{m_h}{}_h u_0 \ldots \Delta^{m_n}{}_n u_0.$$

C. Q. F. D.

6. *Remarque.* — En suivant la même marche, il est facile de voir que si l'on ajoute terme à terme plusieurs séries arithmétiques, on obtient en général une série arithmétique d'ordre égal à l'ordre le plus élevé des séries données, et ayant pour différence constante la somme des quantités analogues dans les séries de l'ordre le plus élevé.

Il existe une proposition semblable pour les séries obtenues en retranchant terme à terme deux séries arithmétiques.

Question 787

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 480);

PAR M. WILLIÈRE.

Déterminer le lieu géométrique du centre d'une sphère qui coupe, sous des angles α, β, γ, *trois sphères données* A, B, C.

Soient (a, b, c), (a', b', c') les centres des sphères A, B, C; r, r', r'' leurs rayons; R le rayon de la sphère qui coupe les précédentes sous les angles α, β, γ, et (x, y, z) son centre. On a

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos\alpha.$$

Si l'on pose

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=S,$$

l'équation précédente devient

$$(1)\qquad S=R^2-2Rr\cos\alpha.$$

On a de même

$$(2)\qquad S'=R^2-2Rr'\cos\beta,$$

$$(3)\qquad S''=R^2-2Rr''\cos\gamma.$$

En éliminant R entre ces trois dernières équations, on trouve

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}(S-S')(r''\cos\gamma-r'\cos\beta)=(S'-S'')(r'\cos\beta-r\cos\alpha),\\ 4S''(r'\cos\beta-r\cos\alpha)^2\\ \quad=(S-S')^2-4r''\cos\gamma(S-S')(r'\cos\beta-r\cos\alpha).\end{array}\right.$$

La première de ces deux équations représente un plan passant par l'axe radical des trois sphères données. Donc les deux équations prises simultanément représentent une conique située dans ce plan.

Remarquons maintenant que les cosinus qui entrent dans les formules précédentes doivent être précédés chacun du double signe $\pm$. Par suite, en changeant, dans les équations (4), les signes des cosinus, on obtiendra d'autres lignes répondant encore à la question. On ne pourra d'ailleurs obtenir ainsi que trois nouvelles coniques. Donc le lieu se compose de quatre coniques situées dans des plans qui passent tous par l'axe radical des trois sphères données.

Note. — M. Georges de Villepin, élève du collége Stanislas, nous a envoyé une bonne solution de la question précédente. Il fait remarquer que les quatre coniques percent en huit points le plan des centres des

sphères données ; que ces huit points sont les centres des cercles qui coupent sous les angles α, β, γ les grands cercles déterminés par ce plan dans les sphères A, B, C; et enfin que ces huit points sont situés deux à deux sur quatre droites passant par le centre radical des trois cercles.

Question 886

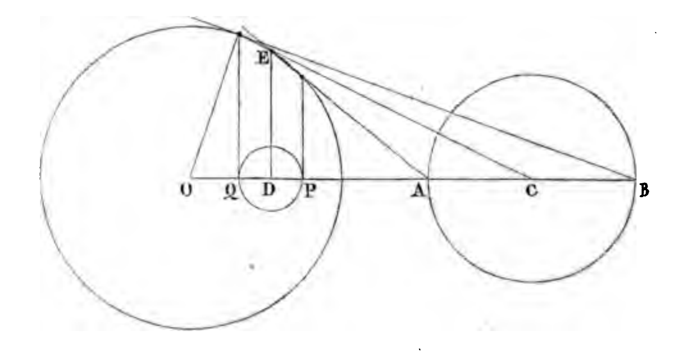
(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 240);

PAR M. PAUL ENDRÈS,
Élève au lycée de Douai.

Étant donnés deux cercles, si l'on prend les polaires de ces cercles par rapport à un cercle quelconque, on obtient deux coniques ; les cercles qui ont pour diamètre les axes focaux de ces coniques se coupent sous le même angle que les cercles donnés.

(H. FAURE.)

On sait que la polaire d'un cercle (C) est une conique ayant pour foyer l'origine O et pour directrice correspondante la polaire DE du centre C du cercle : l'excentricité



est égale au rapport de la distance CO des deux centres au rayon CA du cercle considéré.

Les pieds P, Q des polaires des extrémités du diamètre AB du cercle (C), passant par l'origine O, sont les sommets de cette conique, comme on peut s'en assurer en remarquant que

$$\frac{PO}{PD} = \frac{QO}{QD} = \frac{CO}{CA}.$$

On voit aussi immédiatement que

$$OB \times OQ = OA \times OP = \rho^2.$$

Il en résulte que le cercle décrit sur l'axe focal de la polaire du cercle (C) est le cercle transformé par rayons vecteurs réciproques de ce dernier, l'origine étant le point O, et le module étant le carré du rayon ρ du cercle directeur.

Or deux courbes inverses se coupent sous le même angle que les courbes primitives. Donc les cercles décrits sur les axes focaux des deux coniques polaires des cercles donnés se coupent suivant le même angle que ces derniers.

Note. — La même question a été résolue par M. Willière, professeur à Arlon.

CORRESPONDANCE.

Grenoble, 23 février 1870.

Monsieur,

Dans le numéro de février des *Nouvelles Annales* (p. 53), M. Neuberg, après avoir remarqué que j'avais énoncé plusieurs théorèmes à l'aide desquels on pouvait déterminer les axes d'une conique, quand on connaît le centre et un triangle inscrit, conjugué ou circonscrit à la conique, a résolu la même question en substituant au

centre un foyer. Je me suis aussi occupé de cette recherche, et mon *Recueil de Théorèmes*, publié en 1867, chez M. Gauthier-Villars, en donne la solution. La marche que j'ai suivie n'est pas la même que celle de M. Neuberg: je calcule directement la somme et le produit des carrés des axes de la conique au lieu de passer par les fonctions p et q de l'auteur, et j'adopte le système des coordonnées trilinéaires.

J'ai donné en 1863, p. 299 (t. II, 2e série), des formules qui donnent la somme et le produit des carrés des axes d'une conique en fonction des coefficients de l'équation générale du second degré rapportée à un triangle de référence. Or, lorsqu'il s'agit de coniques inscrites, conjuguées ou circonscrites à ce triangle, c'est-à-dire lorsque l'équation de la conique ne contient plus que trois coefficients différents, on conçoit que l'on puisse exprimer ces coefficients au moyen des distances du centre, du foyer ou même d'un point quelconque aux côtés du triangle de référence. Cela fait, il n'y a plus qu'à appliquer les formules de la page citée (299) à ces équations particulières. Toute la difficulté de la question se réduit donc à trouver ces équations particulières. Or, dans mon *Recueil*, on trouve les théorèmes suivants, que je me borne à indiquer comme pouvant servir d'exercice aux élèves :

1° Quand une conique est conjuguée à un triangle *abc*, si l'on désigne par p_a, p_b, p_c les puissances de son foyer F par rapport aux cercles qui ont pour diamètres les côtés *bc*, *ca*, *ab*, pour tout point m de la conique, on a la relation

$$\frac{\overline{mbc}^2}{p_a.\mathrm{F}bc}+\frac{\overline{mca}^2}{p_b.\mathrm{F}ca}+\frac{\overline{mab}^2}{p_c.\mathrm{F}ab}=0 \quad (\text{p. } 22);$$

2° Une conique étant inscrite au triangle *abc*, si l'on

ésigne par F l'un des foyers de la conique, et par m un e ses points, on a la relation

$$\mathrm{F}a(\mathrm{F}bc.mbc)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{F}b(\mathrm{F}ca.mca)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{F}c(\mathrm{F}ab.mab)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\text{p. } 34);$$

3° Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle abc, si l'on désigne par F l'un de ses foyers, et par m un point de la conique, on a la relation

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} b\mathrm{F}c}{\mathrm{F}a.mbc} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c\mathrm{F}a}{\mathrm{F}b.mca} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a\mathrm{F}b}{\mathrm{F}c.mab} = 0 \quad (\text{p. } 44).$$

Sur la transformation homographique.

Soient F et F′ deux figures homographiques, c' la conique qui, dans l'une des figures F′ correspond au cercle imaginaire c, situé à l'infini dans la figure F. *Ce cercle reste fixe, quel que soit le déplacement de cette figure, translation ou rotation.*

Or, pour que les figures F et F′ puissent devenir homologiques, il faudra que la figure F puisse être placée de telle manière que la conique c' et le cercle c appartiennent à un même cône, et le sommet de ce cône sera le centre d'homologie. Or ce cône n'est autre chose qu'une sphère de rayon nul, qui, dès lors, ne peut être coupé par un plan que suivant des cercles. Donc la conique c' est un cercle, et l'on retrouve la condition obtenue par M. Painvin.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération distinguée.

H. Faure,
Capitaine d'Artillerie.

QUESTIONS.

991. Deux divisions homographiques se trouvent sur la même droite. Au point a de la première division correspond le point b de la seconde; au point b, pris dans la première division, correspond le point c de la seconde; au point c de la première division correspond le point d de la seconde, et ainsi de suite. On obtient ainsi une série indéfinie de points a, b, c, d,.... Prouver que ces points se rapprochent indéfiniment d'un des points doubles des divisions homographiques, ces points doubles étant supposés réels. (ÉMILE WEYR.)

992. Soit C^3 une courbe du troisième ordre et de la troisième classe : on s'approche indéfiniment d'un point d'inflexion en construisant sur la courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point d'intersection de la courbe avec la tangente au point précédent.

(ÉMILE WEYR.)

993. Soit C^3 une courbe du troisième ordre et de la troisième classe : on construit sur cette courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point de contact de la tangente qu'on peut mener à la courbe par le point précédent. Prouver que ces points se rapprochent de plus en plus d'un point de rebroussement.

(ÉMILE WEYR.)

RECTIFICATION.

Question 982, page 93, *au lieu de* sin, *il faut* cos *dans la seconde équation*.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. LAGUERRE (*).

I. — *Considérations générales sur la représentation des points imaginaires situés sur une courbe donnée.*

1. L'emploi des imaginaires en Géometrie ne donne lieu à aucune difficulté sérieuse. Les notions essentielles sur lesquelles il repose sont immédiatement fournies par la Géométrie analytique, et trouvent en elle leur entière légitimation. Ces notions puisées dans l'analyse, le rôle de la Géométrie est de les développer et d'en poursuivre les conséquences par les moyens et avec les ressources qui lui sont propres.

Il y a deux points sur lesquels il semble nécessaire de compléter la théorie. D'une part, on ne sait pas toujours *réaliser* et effectuer les constructions où entrent des données imaginaires, en sorte que certains problèmes, dont la considération des quantités imaginaires fournit une solution très-simple et presque immédiate, ne sont en quelque sorte résolus que théoriquement, les constructions auxquelles conduirait le mode de démonstration employé n'étant pas immédiatement réalisables.

D'autre part, lorsque, dans une proposition, certaines parties de la figure deviennent imaginaires, la proposi-

(*) Je me propose de développer, dans cette serie d'articles, quelques points de la théorie des sections coniques que j'ai laissés de côté dans le Cours que j'ai professé à la salle Gerson. Le lecteur pourra consulter sur ces questions diverses Notes que j'ai publiées dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (1867-1869), et ma Note *sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* insérée dans le journal *l'Institut* (18 mai 1870).

tion donne lieu à plusieurs théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure. Tout théorème exprime, en effet, une relation entre les données, relation que l'on peut représenter par l'équation

$$R = o;$$

si quelques-unes des données deviennent imaginaires, l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = o,$$

ce qui entraîne les deux équations

$$P = o \quad \text{et} \quad Q = o,$$

équations qui, évidemment, sont l'expression de deux théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure.

Pour résoudre complétement les questions que soulève l'emploi des imaginaires en Géométrie, il faut donc pouvoir, d'une proposition où certains éléments sont imaginaires, dégager, par une voie purement géométrique et la considération seule de la figure, les propositions *réelles* qu'elle comprend dans son énoncé.

On pourrait presque, à certains égards, dire que la Géométrie en est actuellement au même point où serait l'Analyse, si l'on se contentait de montrer que toute quantité imaginaire peut être mise sous la forme

$$a + bi,$$

sans indiquer les moyens que l'on doit employer pour la réduire à cette forme.

2. Considérons, dans un plan réel, une droite $O\omega$ que nous prendrons pour l'axe d'un système de coordonnées isotropes; considérons en même temps un système de coordonnées rectangulaires ayant pour axe des x la

lroite $O\omega$, l'axe des y étant la perpendiculaire élevée :n O à la droite $O\omega$.

Soit A un point du plan, réel ou imaginaire, et soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i,$$

es coordonnées isotropes.

Ce point sera représenté dans le plan par un segment 'eprésentatif aa', l'origine a de ce segment étant le point 'éel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par A.

En coordonnées rectangulaires, l'équation de cette lroite est

$$y = i(x - \alpha - \beta i);$$

l'où l'on voit immédiatement que les coordonnées rec-:angulaires du point a sont

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta.$$

L'extrémité a' du segment est le point réel situé sur la lroite isotrope du second système passant par A; cette lroite a pour équation

$$y = -i(x - \gamma - \delta i);$$

lonc le point a' a pour coordonnées

$$x = \gamma \quad \text{et} \quad y = -\delta;$$

l'où cette conclusion :

Étant donné un point A *dont les coordonnées iso-*'*ropes sont*

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i,$$

'origine de son segment représentatif a pour coordon-

nées rectangulaires

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

et les coordonnées de l'extrémité de ce segment sont

$$x = \gamma, \quad y = -\delta.$$

On peut dire, si l'on veut, que, dans le mode de représentation employé par Cauchy, l'origine du segment représente la quantité $u = \alpha + \beta i$, et que l'extrémité représente la quantité $\gamma - \delta i$ *conjuguée* de la coordonnée w.

3. Jusqu'ici nous ne nous sommes occupé que de points distribués d'une façon quelconque dans le plan. Supposons maintenant que nous considérions des points situés sur une courbe donnée (C), dont l'équation en coordonnées isotropes soit

(1) $$f(u, w) = 0.$$

Un point réel a, pris arbitrairement dans le plan, pourra toujours être considéré comme l'origine d'un segment représentatif d'un point situé sur la courbe.

Soient, en effet, α et β les coordonnées rectangulaires de ce point ; faisons, dans l'équation (1), $u = \alpha + \beta i$; cette équation, résolue par rapport à w, nous donnera pour cette variable un certain nombre de valeurs; ce nombre étant, en général, égal au degré de la courbe, mais s'abaissant lorsque la courbe passe par les ombilics.

Soient $\gamma + \delta i$, $\gamma' + \delta' i$,... les différentes valeurs de w qui correspondent ainsi à la valeur donnée de u ; il est clair, d'après ce qui précède, que si l'on construit les points dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement γ et $-\delta$, γ' et $-\delta'$,..., ces points, que je désignerai par a', a'',..., pourront être considérés comme les

extrémités d'autant de segments représentatifs de points situés sur la courbe, l'origine commune de ces segments étant le point a.

Pour abréger, je dirai que ces points a', a'',... sont associés au point a; si, d'ailleurs, la courbe est réelle (et ici, comme dans la suite, j'entends simplement par là une courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est réelle), cette courbe ne peut contenir un point sans contenir aussi le point qui lui est imaginairement conjugué : donc, dans ce cas, si a' désigne l'un quelconque des points associés à un point donné a, a est aussi l'un des points associés de a'.

4. Pour étudier complétement une courbe, il importe de rechercher comment sont distribués dans le plan les segments représentatifs des divers points situés sur une courbe, ou, en d'autres termes, comment se déplace l'extrémité du segment représentatif d'un point de la courbe lorsque son origine se déplace elle-même dans le plan.

Divers géomètres allemands se sont occupés de la façon dont on pouvait représenter les points imaginaires d'une courbe, et ont émis à ce sujet des idées qui ont été reproduites par M. Transon. (*Application de l'Algèbre directive à la Géométrie; Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868.)

L'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires étant

$$F(x, y) = 0;$$

et ξ, η étant un des systèmes de solutions communes de cette équation, on représente, d'après la méthode de Cauchy, les quantités ξ et η par deux points a et b. Ces deux points déterminent, en effet, parfaitement le point de la courbe, et le mode de relation qui existe entre eux caractérise très-bien cette courbe.

Mais on peut faire à cette solution les reproches suivants :

1° Un point réel de la courbe est toujours (si l'on excepte les points qui se trouvent sur l'axe des x) représenté par un couple de points séparés ;

2° Le mode de représentation varie suivant le système d'axes que l'on a choisi.

Ce dernier inconvénient suffirait seul à faire rejeter en Géométrie ce mode de représentation ; comme l'a très-bien dit M. Transon, l'équation proposée ne représente plus, à vrai dire, une courbe comme dans le système de Descartes, mais un mode *de transformation* dont les propriétés se rattachent à celles de la courbe.

L'emploi du segment représentatif, défini comme je l'ai dit plus haut, remédie à tous ces inconvénients. En employant l'équation en coordonnées isotropes de la courbe et en représentant chaque couple de solutions (u, w) de cette équation par les points réels du plan, qui, dans la méthode de Cauchy, représentent la quantité u et la quantité imaginaire conjuguée à w, on voit :

1° Qu'un point réel de la courbe est représenté par ce point lui-même ;

2° Qu'un point imaginaire est toujours représenté par le même segment, quels que soient les axes auxquels on ait rapporté la figure.

En réalité, ces axes ne jouent aucun rôle dans la question ; l'étude de la distribution dans le plan des segments représentatifs des points d'une courbe est une étude de *pure géométrie ;* et si, dans un grand nombre de questions, on peut avoir intérêt à se servir de l'analyse et à faire intervenir des axes coordonnés, les résultats sont toujours indépendants du choix de ces axes, et leur emploi est par là même facilité.

Pour éclaircir ce qui précède, je mentionnerai ici im-

médiatement quelques propositions très-simples et que l'on peut facilement démontrer par les considérations de la Géométrie les plus élémentaires. J'aurai lieu plus tard d'en développer les conséquences.

1° Étant donné un cercle réel, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur ce cercle, il faut et il suffit que les points a et a' soient réciproques par rapport à ce cercle;

2° Étant donnée une ellipse réelle, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur cette ellipse, il faut et il suffit que les deux points a et a' soient situés sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, et que la droite aa' soit parallèle à l'une des normales que l'on peut mener à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole.

Ces notions peuvent être encore présentées d'une façon plus nette et plus précise; mais comme leur développement m'éloignerait un peu du sujet que je traite ici, je renverrai le lecteur à ma Note *sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace*.

5. Lorsqu'un point est assujetti à demeurer sur une courbe donnée (C), on peut fixer sa position simplement par celle de l'origne de son segment représentatif.

Cette origine correspond, il est vrai, à plusieurs points de la courbe; en la désignant par a et en désignant par a', a'',... les divers points associés à a, on voit en effet que (a, a'), (a, a''),... désignent tous des points de la courbe, représentés par des segments ayant pour origine le point a.

Lors donc que l'on se donne le point a, on ne détermine pas complétement le point de la courbe qu'il représente. Cette indétermination peut être, comme on le sait, levée de plusieurs façons.

Considérons, avec Cauchy, un des points associés au point a, et soit a' ce point, en sorte que (a, a') désigne un des points de la courbe; si l'on admet que le point a se déplace en décrivant une courbe continue sans jamais passer par aucun des points auxquels correspondent deux points associés confondus en un même point, l'extrémité du segment, dont l'origine sera le point mobile, sera elle-même bien déterminée sans ambiguïté, si l'on admet que le point de la courbe s'est déplacé lui-même d'une façon continue.

Ces points critiques qui, dans la théorie de Cauchy, jouent un rôle fondamental, sont, il est facile de le voir, les *points singuliers* et les *foyers* de la courbe.

Si l'on suppose que le point a, représentatif du point variable de la courbe, se meut dans un contour ne comprenant aucun des foyers ni des points singuliers de la courbe, le point de la courbe qu'il représente est parfaitement déterminé. Dans le cas contraire, pour savoir quel point il représente, il faut connaître le chemin qu'il a suivi dans son déplacement depuis sa position initiale.

On peut encore lever l'indétermination en supposant, avec Riemann, que le plan se compose d'une série de feuillets superposés. Ainsi, un point quelconque d'une ellipse peut être représenté par un point qui se meut sur deux feuillets appliqués sur le plan de l'ellipse et soudés entre eux le long de la ligne qui joint les deux foyers de la courbe.

Au *point de vue géométrique*, la conception de Riemann semble préférable à celle de Cauchy; mais, pour le moment, je ne m'étendrai pas davantage à ce sujet, qui ne présente d'intérêt que dans les applications du calcul intégral à la Géométrie.

6. D'après ce qui précède, on voit qu'un point (réel

ou imaginaire) situé sur une courbe donnée peut être représenté par un *seul point réel* de son plan; ce point est le point réel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par le point donné. Quand le point donné est réel, le point qui le représente se confond avec lui.

Nous pourrons nous représenter le déplacement d'un point sur une courbe, que les positions successives de ce point soient réelles ou imaginaires, par la courbe que trace dans le plan son *point représentatif*, déterminé comme je viens de le dire.

En général, on peut se représenter la façon dont varie une quantité z en fixant la valeur de cette quantité d'après la position qu'occupe un point mobile sur une courbe arbitrairement choisie du reste.

Lorsque la variable z prend des valeurs imaginaires, la position du point mobile, qui détermine sa valeur, peut être, comme je l'ai dit, représentée par un point réel du plan, et la courbe décrite par ce point donne une idée très-nette de la façon dont varie z.

Ces considérations se prêtent aisément à l'application du calcul intégral à la Géométrie.

Concevons en effet une courbe algébrique (C) et une intégrale dans laquelle la variable soit représentée par la position d'un point mobile sur cette courbe; supposons, par exemple, que l'élément de l'intégrale soit de la forme

$$P\,ds,$$

ds désignant un élément de la courbe et P une fonction dont la valeur ne dépend que de la position du point sur la courbe et nullement des axes auxquels on peut la rapporter.

On comprendra facilement que, pour étudier cette intégrale, il soit avantageux de considérer la variable comme

représentée par la position d'un point mobile sur la courbe, au lieu de la représenter par la position d'un point mobile sur un axe auxiliaire que l'on introduit arbitrairement et sans qu'il joue un rôle quelconque dans la question.

Les intégrales *géométriques* dont je viens de parler ont un sens parfaitement net, indépendamment des axes auxiliaires que l'on peut employer pour la facilité des calculs; il est donc essentiel de pouvoir les traiter d'une façon purement géométrique, ou du moins, si l'on est obligé, dans l'emploi de l'analyse, à se servir d'axes coordonnés, d'employer un système de coordonnées qui laisse en évidence ce caractère géométrique des intégrales. C'est à quoi l'on parviendra par l'emploi des coordonnées isotropes.

Il résulte, du reste, des beaux travaux de Riemann et de M. Clebsch, que ces intégrales géométriques comprennent toutes les intégrales d'origine algébrique.

Les considérations qui précèdent sont, au fond, le développement des idées de Cauchy. L'illustre géomètre fixe la valeur de la variable par la position d'un point sur une ligne droite; lorsque ce point est imaginaire, il le représente comme nous par le point réel situé sur la droite isotrope du premier système que l'on peut mener par le point donné.

A chaque courbe, comme l'a montré M. Clebsch, se rattachent un certain nombre d'intégrales qui jouent un rôle des plus importants dans la théorie de cette courbe; il semble donc naturel, pour étudier ces intégrales, de fixer la valeur de la variable par la position d'un point mobile sur cette courbe elle-même.

II. — *Représentation des points situés sur une droite donnée.*

7. Considérons une droite réelle ou imaginaire tracée dans un plan. Supposons-la rapportée à un système de coordonnées isotropes, et soit Oω l'axe des coordonnées. Soit A un point mobile de la droite dont les coordonnées soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i;$$

comme je l'ai montré ci-dessus, les coordonnées de l'origine a et de l'extrémité a' du segment représentatif de A seront respectivement

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

et

$$y = \gamma, \quad y = -\delta.$$

Soit a'' le point symétrique du point a' par rapport à l'axe Oω, ses coordonnées seront

$$x = \gamma \quad \text{et} \quad y = \delta,$$

en sorte que, si nous adoptons pour un instant le langage de l'Algèbre directive, les longueurs Oa et Oa'' représenteront les deux coordonnées u et w.

Ces coordonnées sont liées entre elles par une relation linéaire que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$w = re^{\theta i}.u + m,$$

r et θ étant des quantités réelles et m une quantité imaginaire. Le vecteur Oa'' peut donc se déduire de Oa au moyen des trois opérations suivantes :

1° En multipliant le vecteur Oa par la quantité relle r : cette opération a pour but de dilater tous les vecteurs dans un rapport constant, en sorte qu'après l'opération la

figure formée par les points a'' est homothétique à celle formée par les points a;

2° En multipliant le résultat obtenu par $e^{\theta i}$; l'opération a pour résultat de faire tourner la figure précédemment obtenue autour du point O de l'angle θ;

3° En ajoutant au deuxième résultat obtenu la quantité m; le résultat de l'opération est de transporter la figure parallèlement à elle-même.

D'où cette cette conclusion :

La figure formée par les points a et la figure formée par les points a'' sont deux figures directement semblables.

Remarquons maintenant que la figure formée par les points a' est symétrique par rapport à l'axe Oω de la figure formée par les points a', a''.

D'où cette conclusion :

Si un nombre quelconque de segments représentent des points situés sur une même ligne droite, le polygone formé par les origines de ces segments et le polygone formé par leurs extrémités sont deux polygones semblables et inversement placés.

Deux points suffisant pour déterminer une droite, la réciproque de cette proposition est évidemment vraie.

8. Les considérations qui précèdent mènent facilement à la solution de divers problèmes très-simples que l'on peut se proposer sur les droites, mais que je développerai avec quelques détails, parce qu'ils me seront utiles par la suite.

Problème I. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'); étant donné un point réel quelconque du plan, si on le considère comme l'origine du segment représentatif d'un point de la droite, trouver son extrémité.*

Soit c le point donné ; on construira le point c' tel, que le triangle $a'b'c'$ soit semblable au triangle abc et inversement placé ; le point c' sera le point demandé.

Problème II. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'), trouver le point réel situé sur cette droite.*

Soit x le point cherché ; ce point étant réel, le segment qui le représente est xx : les deux triangles xab et $xa'b'$ doivent donc être semblables et inversement placés.

Construisons le cercle lieu des points dont les distances à a et a' soit dans le rapport de ab à $a'b'$; construisons le cercle lieu des points dont les distances à b et b' soit dans le même rapport. Ces deux cercles se coupent en deux points réels x' et x'' ; on choisira celui de ces deux points qui, joint aux points (a, b) et (a', b'), donne deux triangles semblables *inversement* placés.

Problème III. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'), et une autre droite étant définie par deux autres points (α, α') et (β, β'), trouver leur point de rencontre.*

Déterminons les extrémités des segments qui représentent des points de la deuxième droite et ont pour origine les points a et b (problème I) ; soient a'' et b'' ces extrémités ; soit (x, x') le point d'intersection cherché.

Les points (a, a'), (b, b'), (x, x') étant en ligne droite, les triangles abx et $a'b'x'$ sont semblables et inversement placés.

Les points (a, a''), (b, b''), (x, x') étant aussi en ligne droite, les triangles abx et $a''b''x'$ sont aussi semblables et inversement placés.

Donc les triangles $a'b'x'$ et $a''b''x'$ sont semblables et semblablement placés. On construira les deux cercles lieux des points dont les distances à a' et a'', et à b' et b''

sont dans le rapport de $a'b'$ à $a''b''$. Ces deux cercles se couperont en deux points réels; on choisira de ces deux points celui qui, joint aux points (a', b') et (a'', b''), donne deux triangles semblables et *semblablement* placés. Ce point sera le point x'; au moyen du problème I, on en déduira le point x.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BOURGET;

PAR M. LAGUERRE.

Permettez-moi d'ajouter aux beaux théorèmes de Steiner et de M. Cremona, démontrés par M. Painvin, quelques propositions nouvelles, et fondamentales dans la théorie de l'hypocycloïde; elles se déduisent très-facilement des théorèmes généraux que j'ai donnés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (*Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques*, janvier 1865), et dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (*Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*, février 1867); j'en ai déduit, du reste, les principales conséquences relatives à l'hypocycloïde, dans le cours que j'ai professé cet hiver à la salle Gerson.

Les deux propositions fondamentales auxquelles donne lieu cette courbe sont les suivantes :

THÉORÈME I. — *Les trois tangentes que, par un même point, on peut mener à l'hypocycloïde font, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, des angles dont la somme est un multiple de* π.

THÉORÈME II. — *Si, par un point* P, *on mène trois tangentes à l'hypocycloïde, et si l'on désigne par* A, B, C *les trois points de contact; si, sur le prolongement*

d'une quelconque de ces trois tangentes PA, *on prend un point* A' *tel, que* PA' *soit le double de* PA, *les quatre points* P, A', B, C *sont sur une même circonférence et partagent harmoniquement cette circonférence.*

Voici quelques conséquences de ces propositions.

Soit une droite touchant la courbe au point M, et la coupant en P et R. Si l'on désigne par δ l'inclinaison de cette droite sur une quelconque des tangentes de rebroussement, et par ϖ l'inclinaison, sur cette tangente, de la tangente en P, on aura, en vertu du théorème I,

$$\delta + 2\varpi = \text{multiple de } \pi;$$

en désignant de même par ρ l'inclinaison sur cette tangente de la tangente au point R, on aura

$$\delta + 2\rho = \text{multiple de } \pi;$$

on déduit de là

$$2(\varpi - \rho) = \text{multiple de } \pi.$$

D'où l'on voit que

$$\varpi - \rho = 0, \quad \text{ou bien} \quad = \frac{\pi}{2}.$$

Deux tangentes à l'hypocycloïde ne pouvant être parallèles, on a

$$\varpi - \rho = \frac{\pi}{2}.$$

Donc les tangentes aux points P et R sont perpendiculaires entre elles.

Considérons maintenant les trois tangentes PA, PB et PC issues d'un même point P, et supposons que deux d'entre elles, PB et PC, soient rectangulaires; si nous prolongeons AP d'une longueur double d'elle-même au delà du point P, l'extrémité A' du segment ainsi obtenu sera sur la circonférence passant par les points P, B, C,

et sur cette circonférence sera le conjugué harmoniq du point P; mais, d'après les propriétés bien connues la division harmonique sur un cercle, l'angle $\widehat{BPC}$ éta droit, la ligne BC est perpendiculaire sur PA', c'est-dire sur PA.

Donc, si deux des tangentes issues d'un point P so rectangulaires, la corde des contacts de ces deux tangent est perpendiculaire à la troisième tangente issue du mê point.

Vos lecteurs trouveront peut-être quelque intérêt rapprocher ces démonstrations géométriques des démor trations analytiques données par M. Painvin.

On peut ajouter ici la proposition suivante, rema quable par sa simplicité et son élégance :

Si d'un point A *de l'hypocycloïde, on mène à courbe la tangente dont le point de contact ne coïnci pas avec* A ; *en désignant par* T *le point de contact cette tangente, si l'on prolonge* TA *d'une longue égale à elle-même, le point* T', *extrémité de ce prolo gement, est le foyer de la parabole qui suroscule en l'hypocycloïde.*

NOTE SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

(suite et fin, voir 2e série, t. IX, p. 202);

PAR M. L. PAINVIN.

---

§ II. — *Propriétés principales de l'hypocycloïde*

6. Donnons d'abord l'interprétation géométrique l'équation (III *bis*), n° 2.

D'après la relation (3), n° 2, on a

$$X + Y + Z = \frac{9a}{2}.$$

On sait d'ailleurs que l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$YZ + ZX + XY = 0;$$

et, d'après les formules (2) du n° 2, on a l'identité

$$XY + YZ + ZX = -\frac{3}{4}(x^2 + y^2 - a^2).$$

Si l'on désigne par $\overline{MI}.\overline{MI'}$ le produit des distances, comptées sur le diamètre OM, d'un point quelconque M de l'hypocycloïde au cercle directeur, et que MP, MQ, MR soient les distances du même point M aux trois côtés du triangle équilatéral ABC, l'équation (III), n° 2, nous conduit à la relation

$$(MI.MI')^2 = 32a.\overline{MP}.\overline{MQ}.\overline{MR}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème V. — *Le carré de la puissance d'un point quelconque de la courbe par rapport au cercle directeur divisé par le produit des distances du même point aux côtés du triangle ayant pour sommets les trois points de rebroussement, est constant et égal à trente-deux fois le tiers du rayon du cercle directeur.*

7. L'équation tangentielle (IV), n° 3, nous conduit à une relation fort remarquable entre les distances des sommets du triangle de référence à une tangente quelconque.

Si l'on désigne par δ, δ_1, δ_2, δ_3 les distances des points O, A, B, C à la tangente (u, v, w), on a

$$\delta_1 = u, \quad \delta_2 = v, \quad \delta_3 = w, \quad \delta = \frac{u + v + w}{3};$$

cette dernière valeur résulte de ce que le point O est le centre de gravité du triangle ABC.

D'après cela, l'équation (IV), n° 3, nous donne

$$\delta^3 = \delta_1 \delta_2 \delta_3;$$

d'où :

THÉORÈME VI. — *Le cube de la distance du centre du cercle directeur à une tangente quelconque est égal au produit des distances, à cette même tangente, des trois points de rebroussement.*

8. L'équation (1) du n° 1, savoir :

$$\text{(T)} \qquad (7) \quad x \sin\frac{\alpha}{2} + y \cos\frac{\alpha}{2} = a \sin\frac{3\alpha}{2}$$

peut être considérée comme l'équation d'une tangente parallèle à une direction donnée, en regardant α comme connu ; les coordonnées du point de contact de cette tangente seront toujours données par les formules

$$\text{(M)} \quad (7\,bis) \quad x = a(2\cos\alpha + \cos 2\alpha), \quad y = a(2\sin\alpha - \sin 2\alpha).$$

On voit par là qu'il n'y a qu'*une seule tangente*, à distance finie, *parallèle à une direction donnée*.

Considérons une seconde tangente

$$x \sin\frac{\beta}{2} + y \cos\frac{\beta}{2} = a \sin\frac{3\beta}{2};$$

cette seconde tangente sera perpendiculaire à la première si l'on suppose $\beta = \alpha + \pi$, et son équation deviendra alors

$$(8) \qquad x \cos\frac{\alpha}{2} - y \sin\frac{\alpha}{2} = -a \cos\frac{3\alpha}{2}.$$

Si, après avoir élevé au carré, on ajoute membre à membre les équations (7) et (8), on trouve

$$(\varphi) \qquad (9) \quad x^2 + y^2 = a^2;$$

c'est-à-dire que deux tangentes rectangulaires se coupent sur le cercle (φ) de rayon a.

9. Un point quelconque P du cercle (φ) ou (9) peut se définir par les égalités

$$\text{(P)} \qquad (10) \qquad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi;$$

du point P, on peut mener trois tangentes à l'hypocycloïde; pour avoir les paramètres relatifs aux points de contact de ces tangentes, il suffira de transporter dans l'équation (7) les valeurs (10) qui précèdent; on trouve ainsi

$$\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{3\alpha}{2}.$$

On tire de là, pour α, les trois valeurs suivantes, qu sont les seules distinctes :

$$(11) \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_3 = \varphi.$$

Les trois tangentes menées du point P, ou (10), à l'hypocycloïde et leurs points de contact auront alors pour équations respectives

$$(12)\left\{\begin{array}{ll}
(T_1) & x\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) + y\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) = a\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\varphi}{4}\right);\\
(T_2) & x\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) - y\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) = a\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\varphi}{4}\right);\\
(T_3) & x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = a\sin\frac{3\varphi}{2};\\
(M_1) & \left\{\begin{array}{l} x_1 = a\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right),\\ y_1 = a\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right);\end{array}\right.\\
(M_2) & \left\{\begin{array}{l} x_2 = a\left(-2\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right),\\ y_2 = a\left(-2\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right);\end{array}\right.\\
(M_3) & \left\{\begin{array}{l} x_3 = a(2\cos\varphi + \cos2\varphi),\\ y_3 = a(2\sin\varphi - \sin2\varphi).\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

La droite qui joint les deux points M_1 et M_2 a pour équation

$$(13) \qquad x\cos\frac{\varphi}{2} - y\sin\frac{\varphi}{2} = -a\cos\frac{3\varphi}{2};$$

si l'on suppose $\varphi = \pi + \alpha$, on retrouve la forme de l'équation d'une tangente.

A l'aide de ces formules, on constate immédiatement que les tangentes T_1 et T_2 sont rectangulaires; que la troisième tangente T_3 est perpendiculaire à la droite $M_1 M_2$ qui joint les points de contact des deux premières; la droite $M_1 M_2$ est également une tangente de l'hypocycloïde et est parallèle au diamètre passant par les points où les tangentes T_1 et T_2 rencontrent le cercle de rayon a.

De là la proposition suivante :

Théorème VII. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à l'hypocycloïde est le cercle de rayon a, concentrique au cercle directeur, et triplement tangent à la courbe.* Nommons φ ce cercle.

Si, d'un point quelconque du cercle φ, on mène les trois tangentes à l'hypocycloïde, deux d'entre elles sont rectangulaires, et par suite coupent le cercle φ en deux points situés sur un même diamètre; la troisième tangente est perpendiculaire à ce diamètre et à la droite qui joint les points de contact des deux premières; cette dernière droite est également tangente à l'hypocycloïde.

10. On peut encore énoncer la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Si l'on mène une tangente quelconque, T_0, à l'hypocycloïde, les tangentes T_1 et T_2 aux deux autres points d'intersection de T_0 avec la courbe se coupent sur le cercle φ; par suite, T_1 et T_2 se*

coupent à angle droit, et la troisième tangente, T_3, *qu'on peut mener du point où elles se coupent, est perpendiculaire à la première tangente* T_0.

(Cremona, n°s 2, 3.)

Cette propriété, qui est une conséquence de celle qui précède, peut encore s'établir directement comme il suit.

Considérons une tangente quelconque T_0

(14) $$(T_0) \quad x \sin\frac{\alpha_0}{2} + y\cos\frac{\alpha_0}{2} = a\sin\frac{3\alpha_0}{2}.$$

Pour déterminer les points où la tangente T_0 rencontre encore la courbe, remplaçons dans l'équation (14) x et y par les valeurs (7 *bis*), n° 8; on trouve ainsi

$$2\sin\left(\alpha + \frac{\alpha_0}{2}\right) = \sin\left(2\alpha - \frac{\alpha_0}{2}\right) + \sin\frac{3\alpha_0}{2};$$

d'où

$$\sin\left(\alpha + \frac{\alpha_0}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha - \alpha_0}{2} = 0,$$

et par suite

(15) $$\alpha_1 = -\frac{\alpha_0}{2}, \quad \alpha_2 = \pi - \frac{\alpha_0}{2}.$$

On aura immédiatement les équations des tangentes aux points qui correspondent aux valeurs précédentes du paramètre α, et de là on conclura la proposition énoncée.

11. L'équation (7), n° 8, nous conduit encore très-aisément à l'équation de la *podaire* du point O; il suffit, pour cela, d'éliminer $\frac{\alpha}{2}$ entre cette équation et l'équation suivante de la perpendiculaire menée du point O à cette tangente :

$$x\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2} = 0.$$

On trouve, pour l'équation de cette podaire,

(16) $(x^2+y^2)^2 = ax(3y^2-x^2)$, ou $\rho = -a\cos 3\omega$.

Ainsi :

Théorème IX. — *La* podaire *du point* O, *par rapport à l'hypocycloïde, est une courbe du quatrième ordre; elle a, à l'origine, un point triple dont les tangentes sont parallèles aux côtés du triangle* A'B'C' (*fig.* 1) : *les droites* OA, OB, OC *sont des axes de symétrie; la courbe est de sixième classe; la droite de l'infini est également une tangente double. Cette courbe possède quatre tangentes doubles réelles et six points d'inflexion; elle est tangente à l'hypocycloïde aux trois points* A', B', C'. *Les branches de la podaire et les droites* OA, OB, OC *divisent en quatre parties égales les côtés du triangle* A'B'C'.

§ III. — *Propriétés des polaires d'une droite relatives à l'hypocycloïde.*

12. L'équation tangentielle de l'hypocycloïde

(1) $$(u+v+w)^3 = 27uvw$$

nous fait connaître des propriétés fort remarquables relatives aux polaires d'une droite.

On sait que la première polaire d'une droite (u_0, v_0, w_0) par rapport à la courbe

$$F(u, v, w) = 0$$

a pour équation (*Géométrie analytique*, n° 464)

$$u_0\frac{dF}{du} + v_0\frac{dF}{dv} + w_0\frac{dF}{dw} = 0.$$

Dans le cas de l'hypocycloïde, nous trouvons, pour

l'équation de la *première polaire* de la droite D (u_0, v_0, w_0),

(P) (2) $$(u_0 + v_0 + w_0)(u + v + w)^2 = 9(u_0 vw + v_0 wu + w_0 uv).$$

On voit de suite que cette dernière courbe est une parabole, car elle est touchée par la droite de l'infini dont les coordonnées sont, dans le système actuel,

$$u = v = w.$$

13. Déterminons les foyers de la parabole (P). Les foyers d'une courbe sont les intersections des tangentes menées à cette courbe par les points circulaires à l'infini. Comme la droite de l'infini est tangente à la parabole, les deux foyers imaginaires coïncideront avec les points circulaires à l'infini; les deux foyers réels seront, l'un à distance finie, l'autre à l'infini, sur la direction de l'axe.

L'équation tangentielle des points circulaires à l'infini est

(3) $$u^2 + v^2 + w^2 - vw - wu - uv = 0;$$

et, après avoir posé

(4) $$\left\{\begin{aligned} m + 1 &= \frac{3u_0}{u_0 + v_0 + w_0},\\ n + 1 &= \frac{3v_0}{u_0 + v_0 + w_0},\\ p + 1 &= \frac{3w_0}{u_0 + v_0 + w_0},\end{aligned}\right.$$

d'où résulte la relation

(5) $$m + n + p = 0,$$

l'équation générale des courbes de deuxième classe touchant les tangentes communes aux courbes (2) et (3), c'est-à-dire touchant les droites menées des points circu-

laires à l'infini tangentiellement à la parabole (P), sera

$$(6)\quad \begin{cases} (\lambda+1)u^2+(\lambda+1)v^2+(\lambda+1)w^2-(\lambda+1+3m)vw \\ \qquad -(\lambda+1+3n)wu-(\lambda+1+3p)uv=0. \end{cases}$$

Si l'on exprime que la courbe (6) se réduit à deux points, ces points seront les intersections des tangentes communes, c'est-à-dire les foyers de la parabole. Or, pour que l'équation (6) représente deux points, il faut que le premier membre soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, ce qui conduit à l'équation de condition

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\frac{\lambda+1+3p}{2} & -\frac{\lambda+1+3n}{2} \\ -\frac{\lambda+1+3p}{2} & \lambda+1 & -\frac{\lambda+1+3m}{2} \\ -\frac{\lambda+1+3n}{2} & -\frac{\lambda+1+3m}{2} & \lambda+1 \end{vmatrix}=0.$$

La courbe (6) se réduisant à deux points qui doivent être les foyers, et, parmi ces foyers, deux devant coïncider avec les points circulaires à l'infini représentés par l'équation (3), il en résulte que l'équation en λ admettra deux racines infinies; les deux foyers réels correspondront à la valeur finie de λ; l'axe de la parabole sera la droite qui joint ces deux foyers.

L'équation (7) développée donne, eu égard à la relation (5),

$$\lambda+1=-\frac{3mnp}{mn+np+pm};$$

et l'équation (6) devient

$$(8)\quad \begin{cases} u^2+v^2+w^2 \\ \quad +\frac{m^2-2np}{np}vw+\frac{n^2-2pm}{pm}wu+\frac{p^2-2mn}{mn}uv=0; \end{cases}$$

on constate très-aisément que cette dernière équation peut s'écrire

$$(mu+nv+pw)\left(\frac{u}{m}+\frac{v}{n}+\frac{w}{p}\right)=0.$$

Il résulte de là que les deux foyers réels de la parabole sont

$$(9)\qquad \begin{cases} (\mathrm{F}) & \dfrac{u}{m}+\dfrac{v}{n}+\dfrac{w}{p}=0,\\ (\mathrm{F}') & mu+nv+pw=0; \end{cases}$$

on a toujours la relation

$$(9\ bis)\qquad m+n+p=0.$$

Le second foyer F′ est à l'infini, car son équation est vérifiée par les coordonnées $u=v=w$ de la droite de l'infini.

14. Si l'on considère une droite $\mathrm{D}'(u'_0, v'_0, w'_0)$ parallèle à la droite $\mathrm{D}(u_0, v_0, w_0)$, les coordonnées de la première droite seront

$$u'_0=u_0+k,\quad v'_0=v_0+k,\quad w'_0=w_0+k;$$

et si l'on pose

$$m'+1=\frac{3u'_0}{u'_0+v'_0+w'_0},$$
$$n'+1=\frac{3v'_0}{u'_0+v'_0+w'_0},$$
$$p'+1=\frac{3w'_0}{u'_0+v'_0+w'_0},$$

on constate de suite que

$$(10)\qquad \frac{m'}{m}=\frac{n'}{n}=\frac{p'}{p}=\frac{u_0+v_0+w_0}{u_0+v_0+w_0+3k}.$$

On voit par là que, pour la parabole correspondant à

la nouvelle droite D′, les foyers F et F′ ne changent pas; les premières polaires des droites parallèles ont donc les mêmes foyers.

15. L'axe de la parabole (P) est perpendiculaire à la droite D.

On voit, en effet, d'après les équations (9), que les coordonnées trilatères des foyers F et F′ sont données par les égalités

$$mX = nY = pZ, \quad \frac{X}{m} = \frac{Y}{n} = \frac{Z}{p};$$

l'équation de l'axe de la parabole sera, par conséquent,

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ m & n & p \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{n} & \frac{1}{p} \end{vmatrix} = 0;$$

quant à l'équation ponctuelle de la droite D, elle est

$$u_0 X + v_0 Y + w_0 Z = 0,$$

ou

$$(m+1)X + (n+1)Y + (p+1)Z = 0.$$

Or la condition d'orthogonalité de deux droites (*Géométrie analytique*, n° 100) est satisfaite pour ces deux dernières droites; la vérification en est immédiate.

On a donc la proposition suivante :

THÉORÈME X. — *La première polaire, par rapport à l'hypocycloïde, d'une droite quelconque* D *est une parabole* (P); *l'axe de la parabole* (P) *est perpendiculaire à la droite* D, *et les premières polaires des droites parallèles sont des paraboles homofocales.*

16. Lorsque la droite D (u_0, v_0, w_0) est tangente à

l'hypocycloïde, on a

$$(u_0 + v_0 + w_0)^3 = 27\, u_0 v_0 w_0;$$

on voit alors que la parabole (2), n° **12**, est également touchée par cette droite; et si l'on se rappelle que le point de contact d'une tangente (u_0, v_0, w_0) à la courbe $F(u, v, w) = 0$ est donné par l'équation

$$u \frac{dF}{du_0} + v \frac{dF}{dv_0} + w \frac{dF}{dw_0} = 0,$$

on constate que la droite D touche l'hypocycloïde (1) et la parabole (2) au même point; comme l'axe de la parabole est perpendiculaire à la droite D, il s'ensuit que ce point de contact commun est le sommet de la parabole. Donc :

Théorème XI. — *La première polaire d'une tangente à l'hypocycloïde est une parabole ayant cette droite pour tangente au sommet, et pour sommet le point de contact de cette droite avec l'hypocycloïde. Le lieu des sommets des premières polaires des tangentes à l'hypocycloïde est donc l'hypocycloïde même; l'axe de la première polaire est une normale à la courbe, l'enveloppe de cet axe est donc la développée de l'hypocycloïde.*

17. Les coordonnées trilatères du foyer à distance finie sont, d'après la première des équations (9),

$$mX = nY = pZ;$$

le lieu de ces foyers s'obtiendra en éliminant m, n, p, entre ces équations et la relation

$$m + n + p = 0;$$

on trouve ainsi le cercle circonscrit au triangle ABC

$$YZ + ZX + XY = 0.$$

Donc:

Théorème XII. — *Le lieu des foyers des premières polaires d'une droite quelconque est le cercle directeur de l'hypocycloïde.*

18. *Remarque.* — Les propriétés que je viens d'indiquer se trouvent énoncées dans le Mémoire de M. Cremona, nos 24, 25,... La parabole (P) que je considère ici, se rattache à la théorie générale des polaires d'une droite; cette parabole est la même que celle qui s'est présentée à M. Cremona, et qu'il définit par la condition de toucher les tangentes à l'hypocycloïde aux quatre points où cette courbe est rencontrée par la droite D. L'identité est manifeste, d'après cette propriété fondamentale que j'ai établie dans la théorie des polaires d'une droite: « Les tangentes aux points où une droite rencontre une » courbe sont en même temps tangentes à la première » polaire de cette droite. »

19. Cherchons maintenant l'enveloppe des axes des paraboles P.

Il suffit pour cela d'éliminer m, n, p entre les équations (9) et (9 *bis*), n° 13; on trouve ainsi

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} u^3 + v^3 + w^3 \\ \quad - (u^2 v + u^2 w + v^2 u + v^2 w + w^2 u + w^2 v) + 3uvw = 0. \end{array} \right.$$

J'ai montré, dans la théorie générale des polaires d'une droite, que la courbe

$$H = \begin{vmatrix} \frac{d^2F}{du^2} & \frac{d^2F}{du\,dv} & \frac{d^2F}{du\,dw} \\ \frac{d^2F}{dv\,du} & \frac{d^2F}{dv^2} & \frac{d^2F}{dv\,dw} \\ \frac{d^2F}{dw\,du} & \frac{d^2F}{dw\,dv} & \frac{d^2F}{dw^2} \end{vmatrix} = 0$$

est l'enveloppe des droites pour lesquelles les polaires de deuxième classe relatives à la courbe $F(u, v, w) = 0$ se réduisent à deux points. Or on trouve pour l'hypocycloïde que l'équation (11) est précisément celle de la courbe H. Ainsi :

Théorème XIII. — *L'enveloppe des axes des premières polaires d'une droite quelconque relatives à l'hypocycloïde est la développée de l'hypocycloïde, et cette développée est identique avec la courbe* H, *enveloppe des droites dont les premières polaires se réduisent à deux points.*

20. Étudions de plus près la nature de cette enveloppe ; son équation est

$$(11)\quad \begin{cases} u^3 + v^3 + w^3 \\ \quad - (u^2 v + u^2 w + v^2 u + v^2 w + w^2 u + w^2 v) + 3uvw = 0. \end{cases}$$

Rapportons la courbe (11) au triangle équilatéral $A_1B_1C_1$, inscrit dans le cercle de rayon $9a$, et homothétique inverse du triangle ABC.

Les coordonnées cartésiennes du point A_1 sont

$$y = 0, \quad x = -9a;$$

et, d'après les formules (2), n° 2, ses coordonnées trilatères relatives au triangle ABC seront

$$X_0 = -\frac{15a}{2}, \quad Y_0 = 6a, \quad Z_0 = 6a;$$

l'équation tangentielle du point A_1 sera, par conséquent,

$$X_0 u + Y_0 v + Z_0 w = 0,$$

c'est-à-dire

$$-5u + 4v + 4w = 0.$$

Si nous considérons une droite quelconque (u, v, w), la

distance du point A_1 à cette droite sera

$$\frac{-5u + 4v + 4w}{3}.$$

D'après cela, si nous désignons par U, V, W les distances des points A_1, B_1, C_1 à la droite (u, v, w), on aura les formules de transformation

$$(12)\qquad \begin{cases} 3U = -5u + 4v + 4w, \\ 3V = 4u - 5v + 4w, \\ 3W = 4u + 4v - 5w; \end{cases}$$

d'où

$$(12\ bis)\qquad \begin{cases} 9u = U + 4V + 4W, \\ 9v = 4U + V + 4W, \\ 9w = 4U + 4V + W. \end{cases}$$

Si l'on substitue, dans l'équation (11), les valeurs (12 *bis*) de u, v, w, on aura l'équation de la courbe (H) rapportée au triangle $A_1B_1C_1$; on trouvera ainsi

$$(13)\qquad (U + V + W)^3 = 27UVW.$$

De là cette proposition :

THÉORÈME XIV. — *La courbe* (H), *ou la développée de l'hypocycloïde, est une hypocycloïde inversement homothétique de la première; le rapport d'homothétie est* $\frac{1}{3}$. *La développée touche le cercle directeur aux points de rebroussement de l'hypocycloïde primitive.*

21. Je ne ferai qu'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XV. — *Les premières polaires des axes des paraboles* (P) *se réduisent à deux points, dont un est à l'infini; le lieu du second point* (f), *à distance finie, est encore le cercle directeur de l'hypocycloïde; les points* (F) *et* (f) *sont diamétralement opposés,* (F) *étant le foyer, à distance finie, de la parabole* (P).

MÉMOIRE SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES RÉSIDUS NUMÉRIQUES

(suite, voir 2e série, t. IX, p. 221);

PAR MM. A. LAISANT ET ÉTIENNE BEAUJEUX.

8. La propriété établie au n° 4 donne lieu à quelques conséqnences dont voici un exemple. Supposons que le diviseur ait quatre chiffres, et qu'il s'écrive $abcd$ dans le système de numération dont la base est q.

On pourra écrire les nombres suivants :

$$a,\ a+b,\ a+b+c,\ a+b+c+d,\ b+c+d,\ c+d,\ d,$$

sous sept restes consécutifs quelconques r_{p+7}, r_{p+6}, r_{p+5}, r_{p+4}, r_{p+3}, r_{p+2}, r_{p+1}, écrits dans l'ordre inverse de celui dans lequel ils ont été obtenus. La somme des produits respectifs sera encore un multiple du diviseur D. On a en effet (4)

$$\begin{aligned}
a r_{p+7} + b r_{p+6} + c r_{p+5} + d r_{p+4} &= m.\mathrm{D},\\
a r_{p+6} + b r_{p+5} + c r_{p+4} + d r_{p+3} &= m.\mathrm{D},\\
a r_{p+5} + b r_{p+4} + c r_{p+3} + d r_{p+2} &= m.\mathrm{D},\\
a r_{p+4} + b r_{p+3} + c r_{p+2} + d r_{n+1} &= m.\mathrm{D}.
\end{aligned}$$

Ajoutant

$$\begin{aligned}
a r_{p+7} &+ (a+b) r_{p+6} + (a+b+c) r_{p+5}\\
&+ (a+b+c+d) r_{p+4} + (b+c+d) r_{p+3}\\
&+ (c+d) r_{p+2} + d r_{p+1} = m.\mathrm{D}.
\end{aligned}$$

On aurait aussi bien pu écrire les nombres suivants au-dessous des restes considérés :

$$\begin{gathered}
a,\quad -a+b,\quad a-b+c,\quad -a+b-c+d,\\
-b+c-d,\quad -c+d,\quad -d,
\end{gathered}$$

et la propriété aurait toujours subsisté, comme on le verrait sans peine, en changeant de deux en deux les signes des égalités ci-dessus.

Il serait aisé d'étendre à un nombre quelconque de chiffres cette propriété que nous avons seulement énoncée ici pour un diviseur de quatre chiffres, pour plus de facilité dans la démonstration.

9. Soit encore un diviseur de quatre chiffres *abcd*. On aura toujours les quatre égalités du numéro précédent. En multipliant la première par a, la deuxième par $-b$, la troisième par c, la quatrième par $-d$, et ajoutant, on éliminera les termes en r_{p+2}, r_{p+4}, r_{p+6}, et il viendra

$$a^2 r_{p+7} - (b^2 - 2a \times c) r_{p+5} + (c^2 - 2b \times d) r_{p+3} - d^2 r_{p+1} = m.\mathrm{D}.$$

On étendrait aisément aussi cette propriété à un nombre quelconque de chiffres. Elle se réduit, comme on le voit, à

$$a^2 r_{p+3} - b^2 r_{p+1} = m.\mathrm{D},$$

dans le cas où le diviseur n'a que deux chiffres a et b.

10. Soit qu'en divisant les termes de la progression : A, AB, AB^2, . . ., où B est la base du système de numération, par un diviseur de p chiffres $a_p a_{p-1} \ldots a_2 a_1 = \mathrm{D}_1$, on ait trouvé les restes successifs

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \ldots, r_p, \ldots,$$

r_0 étant un reste quelconque, et que les chiffres correspondants obtenus au quotient, en faisant la division d'une façon continue, comme pour les fractions décimales périodiques, soient

$$\mathrm{Q}_0, \; \mathrm{Q}_1, \; \mathrm{Q}_2, \ldots, \; \mathrm{Q}_p, \ldots.$$

Considérons les nombres

$$a_p a_{p-1} \ldots a_2 = D_2,$$
$$a_p a_{p-1} \ldots a_3 = D_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_p a_{p-1} = D_{p-1},$$
$$a_p = D_p,$$

que nous nommerons *diviseurs tronqués*, et formons le tableau suivant :

Diviseurs tronqués......	$D_p,\ D_{p-1}, \ldots,\ D_2,\ D_1,$
Chiffres du quotient......	$Q_p,\ Q_{p-1}, \ldots,\ Q_2,\ Q_1,\ Q_0,$
Restes correspondants....	$r_p,\ r_{p-1}, \ldots,\ r_2,\ r_1,\ r_0,$
Chiffres du diviseur.....	$a_p,\ a_{p-1}, \ldots,\ a_2,\ a_1,$

on aura

$$a_p r_p + a_{p-1} r_{p-1} + a_1 r_1$$
$$= D_1 \times (r_1 - D_2 Q_2 - D_3 Q_3 - \ldots - D_p Q_p),$$

ou bien

$$= D_1 \times (B r_0 - D_1 Q_1 - D_2 Q_2 - \ldots - D_p Q_p).$$

L'identité de ces deux formules est évidente, car

$$B r_0 = D_1 Q_1 + r_1;$$

d'où

$$r_1 = B r_0 - D_1 Q_1.$$

Il suffit donc de démontrer l'une d'entre elles.

Or

$$B r_0 = Q_1 D_1 + r_1,$$
$$B r_1 = Q_2 D_1 + r_2,$$
$$B r_2 = Q_3 D_1 + r_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$B r_{p-1} = Q_p D_1 + r_p.$$

De là

$$B r_0 = Q_1 D_1 + r_1,$$
$$B^2 r_0 = (Q_1 B + Q_2) D_1 + r_2,$$
$$B^3 r_0 = (Q_1 B^2 + Q_2 B + Q_3) D_1 + r_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$B^p r_0 = (Q_1 B^{p-1} + \ldots + Q_p) D_1 + r_p.$$

Multipliant la première de ces égalités par a_1, la deuxième par a_2, et ainsi de suite, puis ajoutant, il vient

$$B r_0 \times D_1 = D_1 \times \left\{ \begin{array}{l} Q_1(a_1 + a_2 B + \ldots + a_p B^{p-1}) \\ + Q_2(a_2 + a_3 B + \ldots + a_p B^{p-2}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + Q_p a_p \end{array} \right\} \begin{array}{l} + a_1 r_1 \\ + a_2 r_2 \\ + \ldots \\ + a_p r_p. \end{array}$$

Donc

$$a_1 r_1 + \ldots + a_p r_p = D_1 (B r_0 - Q_1 D_1 - Q_2 D_2 - \ldots - Q_p D_p).$$

Cette relation donne, comme on le voit, l'expression du quotient de la quantité $a_1 r_1 + \ldots + a_p r_p$ par le diviseur, en fonction d'un reste (r_0 ou r_1), des chiffres successivement obtenus au quotient, et du diviseur lui-même. Ce quotient est

$$B r_0 - Q_1 D_1 - Q_2 D_2 - \ldots - Q_p D_p,$$

ou

$$r_1 - Q_2 D_2 - Q_3 D_3 - \ldots - Q_p D_p.$$

La propriété du n° 4 nous avait fait connaître que ce quotient est entier, mais sans fournir son expression.

Il ne sera pas sans intérêt de vérifier ce résultat sur un exemple numérique. Soit $\frac{2}{1271}$ que nous cherchons à convertir en décimales. On trouve, en particulier, au

quotient les chiffres successifs 5, 6, 4, 1, 2. Formons le même tableau que ci-dessus :

Diviseurs tronqués......	1	12	127	1271	
Chiffres du quotient.....	2	1	4	6	5
Restes correspondants ...	348	289	156	524	815
Chiffres du diviseur.....	1	2	7	1	

On aura

$$(1\times 348)+(2\times 289)+(7\times 156)+(1\times 524)$$
$$=1271\times[8150-(6\times 1271)-(4\times 127)-(1\times 12)-(2\times 1)],$$
$$=1271\times[524-(4\times 127)-(1\times 12)-(2\times 1)].$$

Dans cet exemple, le nombre entre les crochets est égal à 2. On peut remarquer que, dans tous les cas, ce nombre sera plus petit que la somme des chiffres du diviseur. Car les restes 348, 289, 156, 524 étant tous inférieurs au diviseur 1271, on a

$$(1\times 348)+(2\times 289)+(7\times 156)+(1\times 524)$$
$$<(1+2+7+1)1271.$$

11. Soient r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+3} trois restes consécutifs quelconques, obtenus en divisant par un diviseur D les termes de la progression géométrique : Aq, Aq^2, ...

On a

$$Aq^{n+1}=m.D+r_{n+1},$$
$$Aq^{n+3}=m.D+r_{n+3};$$

d'où, par multiplication,

$$(\alpha)\qquad A^2q^{2n+4}=m.D+r_{n+1}\times r_{n+3};$$

d'autre part

$$Aq^{n+2}=m.D+r_{n+2};$$

élevant au carré

$$(\beta)\qquad A^2q^{2n+4}=m.D+r_{n+2}^2;$$

retranchant α de β,

$$r_{n+2}^2 - r_{n+1} \times r_{n+3} = m \,.\, \mathrm{D}.$$

On verrait de même que quatre restes consécutifs satisfont toujours à la relation

$$r_{n+1} \times r_{n+4} - r_{n+2} \times r_{n+3} = m \,.\, \mathrm{D}.$$

En général, *deux produits quelconques de restes, homogènes par rapport à la lettre r et tels, que les sommes des indices soient égales de part et d'autre, ne diffèrent entre eux que d'un multiple du diviseur.*

Car soient

$$r_i^m \times r_{i'}^{m'} \times r_{i''}^{m''} \times \ldots \quad \text{et} \quad r_j^n \times r_{j'}^{n'} \times r_{j''}^{n''} \times \ldots,$$

et supposons que

$$m + m' + m'' \ldots = n + n' + n'' + \ldots = \mathrm{M}$$
$$mi + m'i' + m''i'' \ldots = nj + n'j' + n''j'' + \ldots = \mathrm{I}.$$

En remplaçant r_i par $\mathrm{A}q^i$, $r_{i'}$ par $\mathrm{A}q^{i'}, \ldots$, et r_j par $\mathrm{A}q^j \ldots$, on ne pourra altérer l'un ou l'autre produit que d'un multiple de D. On aura ainsi

$$\mathrm{A}^m q^{mi} \times \mathrm{A}^{m'} q^{m'i'} \times \ldots = \mathrm{A}^{m+m'+\ldots} \times q^{mi+m'i'+\ldots} = \mathrm{A}^{\mathrm{M}} q^{\mathrm{I}},$$

et

$$\mathrm{A}^n q^{nj} \times \mathrm{A}^{n'} q^{n'j'} \times \ldots = \mathrm{A}^{n+n'+\ldots} \times q^{nj+n'j'+\ldots} = \mathrm{A}^{\mathrm{M}} q^{\mathrm{I}}.$$

Puisque les deux produits ainsi transformés deviennent identiques, leur différence ne pouvait donc être primitivement qu'un multiple de D.

Il est à remarquer qu'on doit faire la somme des indices en comptant ceux-ci dans tous les facteurs du premier degré. C'est ainsi que l'indice de

$$r_i^m = r_i \times r_i \times \ldots \times r_i,$$

a dû être considéré comme égal à *mi*.

Cette transformation de r_i^m en $A^m q^{mi}$, à un multiple près de D, peut conduire encore à d'autre résultats.

Ainsi $A^m q^{mi} = A^{m-1} \times A q^{mi}$, ce que nous pouvons remplacer par $A^{m-1} r_{mi}$. Donc r_i^m ne diffère de $A^{m-1} r_{mi}$ que d'un multiple de D.

12. Si dans la progression géométrique : Aq, Aq^2,... que nous avons considérée jusqu'ici, nous supposons $A = 1$, c'est-à-dire s'il s'agit de la division des puissances successives d'un même nombre par un certain diviseur D, on voit qu'on pourra remplacer r_i par q^i à un multiple près de D. Mais r_1^i peut être aussi remplacé par q^i. Donc r_1^i et r_i ne diffèrent que d'un multiple de D. Par conséquent, r_i^n, r_1^{in}, r_{in} et r_n^i ne diffèrent aussi que par des multiples de D, c'est-à-dire que dans toute relation établissant un caractère de divisibilité par D, il sera permis de faire passer un indice quelconque en exposant, ou réciproquement; ainsi r_{12}, r_3^4, r_4^3, r_1^{12} ne diffèrent que par des multiples de D. Par conséquent aussi, dans tout calcul de ce genre, *on pourra opérer sur les indices comme on opère sur les exposants*; par exemple, on remplacera $r_2^3 \times r_5^4$ par $r_6 \times r_{20}$ ou par r_{26}. Cette remarque est capitale; elle sera fréquemment employée dans ce qui va suivre. Elle est d'une application bien facile, et s'étend même, dans certains cas, aux fonctions de formes fractionnaires qu'on sait devoir être entières, après les opérations effectuées. Ainsi, supposons que nous sachions que $\frac{aD + r_n}{bD + r_p}$ est un nombre entier, D étant premier. Cette expression ne pourra avoir que la forme $C.D + r_{n-p}$. En effet, soit $\frac{aD + r_n}{bD + r_p} = C.D + x$. On tire de là : $r_n = m.D + r_p \times x$. Or on sait que $r_n = m.D + r_p \times r_{n-p}$. Donc $r_p \times x - r_p r_{n-p} = m.D$, ou $r_p(x - r_{n-p}) = m.D$;

ce qui nous montre, puisque D est premier et que r_p n'est pas divisible par D, que $x = m.D + r_{n-p}$. Cette conclusion subsiste toujours lorsque D est simplement premier avec le nombre q qu'on a élevé aux diverses puissances.

Car, dans ce cas encore, r_p ne saurait avoir de facteur commun avec D; on a, en effet

$$q^p = m.D + r_p.$$

Donc si r_p et D avaient un facteur commun α, il appartiendrait aussi à q^p, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

13. *Si l'on divise les puissances successives de deux nombres quelconques q et q' par un diviseur quelconque* D *de $qq' - 1$, deux restes correspondants r_p et r'_p donneront par leur produit un multiple du diviseur,* $+ 1$.

Car, soit

$$D = \frac{qq' - 1}{N};$$

de là

$$qq' = m.D + 1,$$
$$q^p q'^p = m.D + 1,$$

et

$$r_p r'_p = m.D + 1.$$

On verrait d'une façon analogue que si D est un diviseur de $qq' + 1$, $r_p \times r'_p$ sera un multiple de D, $+ 1$, si p est pair, et un multiple de D, $- 1$, si p est impair.

Si l'on considère plusieurs progressions : $q, q^2, \ldots, q', q'^2, \ldots, q'', q''^2, \ldots, \ldots$, et que le diviseur D soit un sous-multiple de $q \times q' \times q'' \times \ldots, - 1$, le produit $r_p r'_p r''_p \ldots$ sera un multiple du diviseur, $+ 1$; on s'en assurerait de la même manière. Si, en particulier, on suppose $q = q' = q'' = \ldots$, on retombe sur ce résultat, que r_p^n ou r_{np} sera un multiple du diviseur, $+ 1$, si ce

diviseur est sous-multiple de $q^n - 1$. On verrait aussi sans plus de peine que, D étant pris de la forme $\frac{q^n + 1}{N}$, on aura r_p^n ou $r_{np} = m.D \pm 1$, suivant que p sera pair ou impair.

14. Nous avons jusqu'à présent considéré les restes de Aq, Aq^2,..., divisés par un même nombre D, indépendamment de toute loi à laquelle ils satisfassent nécessairement, et nous sommes arrivés néanmoins à établir certaines propriétés. Entrant maintenant dans un nouvel ordre d'idées, nous rappellerons que la suite indéfinie des restes qu'on obtient de la sorte prend un caractère périodique, soit dès l'origine des opérations, soit à partir d'un certain moment.

Remarquons d'abord qu'on peut supposer $A < D$; car si l'on a $A > D$ et $= m.D + A'$, la suite des restes dus à Aq, Aq^2,... sera la même que celle due à $A'q$, $A'q^2$,..., où $A' < D$.

En second lieu, on peut supposer que A et D sont premiers entre eux. Soit en effet α leur plus grand commun diviseur, et $\frac{A}{\alpha} = A'$, $\frac{D}{\alpha} = D'$. A' et D' sont premiers entre eux. De plus, on a $Aq^m = m.D + r_m$; A et D étant divisibles par α, r_m le sera aussi, et on aura $r_m = r'_m \alpha$. Donc $A'\alpha q^m = m.\alpha D' + \alpha r'_m$, d'où $A'q^m = m.D' + r'_m$. En divisant les termes de la suite, $A'q$, $A'q^2$,... par D', on obtiendra donc la suite des restes r'_1, r'_2,..., qui, étant multipliés par α, donneront les restes cherchés, r_1, r_2,....

15. Considérons maintenant la suite des restes dans le cas le plus général, celui où cette suite est périodique mixte. Supposons que le nombre des restes non pério-

diques soit $n+1$, en y comprenant comme premier reste $r_0 = A$, et que le nombre des termes de la période soit p. La suite générale sera

$$r_0 r_1 \ldots r_n r_{n+1} r_{n+2} \ldots r_{n+p} r_{n+p+1} \ldots .$$

On aura

$$r_{n+1} = r_{n+p+1}, \quad r_{n+2} = r_{n+p+2},$$

en général

$$r_{N+p} - r_N = 0,$$

pourvu que $N \geqq n+1$. Donc

$$Aq^{N+p} - Aq^N = Aq^N(q^p - 1) = m.D.$$

Or D renferme des facteurs premiers appartenant à q et d'autres qui lui sont étrangers. Soit D' l'ensemble des premiers, D'' l'ensemble des autres. Il faut, comme on le voit par ce qui précède, puisque A et D d'une part, q^N et $q^p - 1$ de l'autre sont premiers entre eux, que l'on ait $q^N = m.D'$, et $q^p - 1 = m.D''$.

La plus petite valeur de N satisfaisant à la première de ces deux relations fournit le nombre $n+1$ des chiffres de la partie non périodique; et la plus petite valeur de p satisfaisant à la seconde donne celui des chiffres de la période.

Si l'on considère un quelconque r_{n+1+k} des restes qui appartiennent à la partie périodique, on a

$$Aq^{n+1+k} = m.D + r_{n+1+k} = m.D'D'' + r_{n+1+k},$$

$$(\alpha) \qquad Aq^{n+1}.q^k = m.D'D'' + r_{n+1+k}.$$

Puisque q^{n+1} est divisible par D', il en sera de même de r_{n+1+k}. Soit $D'r'_k = r_{n+1+k}$. Il viendra, en divisant par D' l'égalité (α),

$$\frac{Aq^{n+1}}{D'} \times q^k = m.D'' + r'_k.$$

Si $\frac{Aq^{n+1}}{D'} = m.D'' + A'$, on voit que la suite des restes

iodiques s'obtiendra en divisant les termes de la suite $A'q$, $A'q^2$,... par D″ et en multipliant par D′ tous résultats ainsi obtenus. Nous ramenons ainsi l'étude propriétés au cas où la période est simple. Aussi, dans numéros suivants, supposerons-nous toujours qu'il en ainsi.

l n'est pas inutile de remarquer qu'on retrouve, par raisonnements ci-dessus, les propriétés servant de nt de départ à la théorie des fractions périodiques, et par la seule considération des restes. On voit, par nple, que la période est simple, lorsque le dénominateur et la base q sont des nombres premiers entre eux; , dans le cas contraire, en débarrassant le dénominateur ous ses facteurs communs avec q, et cherchant la pé-le due au quotient, elle aura le même nombre de nes que celle de la fraction donnée. Enfin, on retombe les relations qui fournissent le nombre des chiffres de ériode et le nombre des chiffres non périodiques.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 466

(voir 1re série, t. XVIII, p. 117);

PAR M. H. BROCARD.

ar un point fixe A *pris sur l'intersection de deux ns fixes, on mène dans un de ces plans une droite able, et dans le second plan, par le même point* A, *droite perpendiculaire à la première droite; puis, ours par le même point* A, *une troisième droite per-*

pendiculaire aux deux premières. Démontrer que l'enveloppe du plan des deux premières droites est un cône du second degré, et de même la surface décrite par la troisième droite. (MAC CULLAGH.)

Application à la sphère du centre A. (CAYLEY.)

Prenons pour origine le point fixe A, pour axe des z la droite d'intersection des deux plans fixes, pour plans des xy et des yz les plans bissecteurs du dièdre fixe, pour plan des xy un plan perpendiculaire à Az, mené par A.

Soit

$$(1) \qquad ax + by + z = 0$$

l'équation d'un plan passant par l'origine. Il doit couper les deux plans fixes donnés

$$(2) \qquad y = mx, \quad y = -mx$$

suivant deux droites rectangulaires. On trouve ainsi la condition

$$(3) \qquad 1 - m^2 + a^2 - b^2m^2 = 0.$$

L'équation de l'enveloppe du plan (1) sous la condition (3) s'obtient facilement, et se décompose en deux

$$(4) \qquad m^2x^2 - y^2 = 0,$$

$$(5) \qquad (1 - m^2)(m^2x^2 - y^2) + m^2z^2 = 0.$$

La première représente les deux plans fixes donnés.

La seconde est l'équation d'un cône du second degré.

La normale au plan (1) menée par l'origine a pour équations

$$(6) \qquad x = az, \quad y = bz,$$

avec la condition (3). Le lieu de cette droite s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (6) et (3). On ar-

rive ainsi à l'équation d'un cône du second degré

$$(7) \qquad (1 - m^2) z^2 + x^2 - m^2 y^2 = 0.$$

On passe facilement au cas où le point A est le centre d'une sphère fixe, et l'on arrive à la proposition suivante :

Étant donnés deux grands cercles C, C′ *fixes sur une sphère dont le centre est en un point fixe* A, *que l'on considère un point* P *sur le cercle* C, *et un point* P′ *sur le cercle* C′, *tels, que* PAP′ *soit un angle droit, l'enveloppe de l'arc de grand cercle* PP′ *sera l'intersection de la sphère avec un cône du second degré ayant son sommet en* A. *Le lieu du pôle de ce grand cercle* PP′ *sera une courbe sphérique définie d'une manière analogue.*

Question 785

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 480);

PAR M. KAHER-BEY,

au Caire.

Mener à deux cercles donnés deux tangentes qui fassent un angle donné, et de façon que la ligne qui joint les points de contact passe par un point donné.

Prenons pour origine le point donné, pour axe des abscisses une parallèle à la ligne des centres, et pour axe des ordonnées une perpendiculaire.

Les équations des deux cercles donnés étant

$$(x - d)^2 + (y - h)^2 = R^2,$$
$$(x - d')^2 + (y - h)^2 = R'^2,$$

les équations des tangentes pourront s'écrire

$$(x - d)\cos\theta + (y - h)\sin\theta = \pm R,$$
$$(x - d')\cos\theta' + (y - h)\sin\theta' = \pm R'.$$

Dans ces équations θ et θ' sont les angles formés par les rayons qui aboutissent aux points de contact, et comme ces rayons sont perpendiculaires sur les tangentes, qui font entre elles un angle donné α, on aura nécessairement

$$\theta' = \theta + \alpha.$$

Les coordonnées des points de contact sont évidemment, en concevant, pour simplifier l'écriture, que R et R' peuvent avoir les deux signes,

$$x_1 = d + R\cos\theta, \quad y_1 = h + R\sin\theta,$$
$$x_2 = d' + R'\cos\theta', \quad y_2 = h + R'\sin\theta'.$$

La droite qui joint les points de contact devant passer par l'origine, on en conclut

$$\frac{h + R\sin\theta}{d + R\cos\theta} = \frac{h + R'\sin\theta'}{d' + R'\cos\theta'},$$

soit, en chassant les dénominateurs et ramenant tous les termes dans le premier membre,

$$hd' - hd + hR'\cos\theta' - hR\cos\theta + Rd'\sin\theta$$
$$- R'd\sin\theta' + RR'(\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta) = 0.$$

Mais $\theta' = \theta + \alpha$. On a donc

$$hd' - hd + hR'(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) - hR\cos\theta$$
$$+ Rd'(\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta) - R'd\sin\theta' - RR'\sin\alpha = 0,$$

$$(Rd'\cos\alpha - R'd - hR'\sin\alpha)\sin\theta$$
$$+ (Rd'\sin\alpha + hR'\cos\alpha - hR)\cos\theta + hd' - hd - RR'\sin\alpha = 0.$$

C'est une équation très-simple de la forme

$$M\sin\theta + N\cos\theta = P.$$

On sait, par les éléments de Trigonométrie rectiligne, que si l'on suppose

$$\tang\varphi = \frac{N}{M},$$

la solution est donné par la relation

$$\sin(\theta + \varphi) = \frac{P\cos\varphi}{M}.$$

Comme les quantités R et R′ peuvent être prises chacune, soit positivement, soit négativement, on peut avoir quatre systèmes de solutions. Les conditions de réalité de ces solutions sont

$$-1 \leq \frac{P\cos\varphi}{M} \leq 1.$$

Note. — La même question a été résolue aussi par M. René Douay, élève du lycée de Besançon.

Question 786

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 480);

PAR M. J. FRETZ,
Élève de l'École Polytechnique de Zurich.

Placer sur trois circonférences données un triangle donné, semblable à celui qu'on obtient en joignant deux à deux les trois centres. (J. PETERSEN.)

Soient C, C′, C″ les centres, r, r', r'' les rayons des trois circonférences; on construit un point x tel, que l'on ait

$$\frac{Cx}{r} = \frac{C'x}{r'} = \frac{C''x}{r''}.$$

Ce point se déterminant par l'intersection de deux cercles indépendants l'un de l'autre, il faut distinguer trois cas : 1° les deux cercles ne se coupent pas : cas d'impossibilité; 2° l'un des deux cercles est tangent à l'autre : le point de contact est le point x; 3° les deux cercles se coupent : il y a deux points x et x', qui satisfont aux conditions précédentes.

Cela posé, on joint x aux trois centres C, C′, C″, et

l'on prend sur Cx et $C'x$ deux points c, c', de telle sorte que la droite cc' soit à la fois parallèle à CC' et égale au côté du triangle donné, qui est l'homologue de CC'. En menant cc'' parallèle à CC'' et en joignant c' à c'', on obtient le triangle $cc'c''$, égal au triangle donné et semblable au triangle $CC'C''$.

Enfin de x comme centre, avec xc, xc', xc'' pour rayons, on décrit des arcs qui coupent les circonférences C, C', C'' respectivement aux points f et g, f' et g', f'' et g''. Les triangles $ff'f''$ et $gg'g''$ sont égaux au triangle $cc'c''$, et, par suite, au triangle donné. La question est donc résolue.

Il peut se faire que c, c', c'' soient hors des cercles C, C', C'' : cela arrive simultanément pour les trois points, et alors il y a impossibilité.

Comme il existe deux points x pouvant fournir chacun deux triangles, le nombre des solutions peut s'élever jusqu'à quatre.

CORRESPONDANCE.

Nous recevons du prince Boncompagni la lettre suivante, que nous nous empressons de mettre sous les yeux de nos lecteurs :

« Rome, 13 avril 1870.

» Monsieur,

» La Notice sur Platon de Tivoli, insérée dans le cahier d'avril 1870 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (p. 145-162), n'est qu'un extrait d'un écrit publié dans le volume intitulé : *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, ecc., tomo IV, anno IV (1850-1851);

Roma, 1852, ecc. (p. 254-286). Cet écrit, qui n'est jamais cité dans le même cahier, a été imprimé séparément dans un opuscule intitulé : *Delle Versioni fatte da Platone Tiburtino,* traduttore del secolo duodecimo : Notizie raccolte da B. Boncompagni ; Roma, tipografia delle Belle-Arti ; 1851, in-4°. M. Chasles a eu la bonté de présenter un exemplaire de ce tirage à part à l'Académie des Sciences, dans la séance du 14 juin 1852, comme on le voit par les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. XXIV, janvier-juin 1852, p. 892, lig. 4-9).

» Dans le cahier cité ci-dessus des *Nouvelles Annales* se sont glissées les fautes suivantes :

Page 145, ligne 16, *au lieu de* Dausson, *lisez* Daunou.
» 151, » 5, *au lieu de* Octaviames, *lisez* Ottaviano.
» » » 14, *au lieu de* Patanio, *lisez* Pataùio.
» 152, » 15, *au lieu de* Discolos, *lisez* Dicolos.
» » » 21, *au lieu de* T. Orioli, *lisez* Francesco Orioli.
» 154, » 15, *au lieu de* Almion, *lisez* Almeone.
» 158, » 1, *au lieu de* couverture, *lisez* tergo della prima carta.
» » » 4-5, *au lieu de* sec ugolini, *lisez* ser ugolini.
» 159, » 4-5, *au lieu de* Albuacasin, *lisez* Abualcasin.
» 161, » 2, *au lieu de* Achasilh, *lisez* achasith.
» » » 23, *au lieu de* interpretoribus, *lisez* interpretibus.

» Veuillez agréer, Monsieur, les sentiments de considération très-distinguée de

» Votre très-dévoué serviteur

» Balthasar Boncompagni. »

QUESTIONS.

994. Si, en un point M d'un hyperboloïde, on mène la normale et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre de la surface, en nommant R et R′ les rayons de courbure principaux du point M, N la longueur de la normale, on a

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+\frac{2}{N}=0.$$

(LAURENT.)

995. On donne un triangle ABC et une ellipse qui a pour foyers les deux points B et C : trouver le lieu des seconds foyers des ellipses inscrites au triangle ABC, et dont un foyer est sur l'ellipse donnée. (LEMOINE.)

996. On donne une surface du second degré et un tétraèdre *abcd*; si l'on désigne par A, B, C, D les faces de ce tétraèdre opposées aux sommets *a*, *b*, *c*, *d*, et par A′, B′, C′, D′ les plans polaires de ces sommets, la somme

$$\sum\frac{\cos(A, A')}{(a, A)\,(o, A')},$$

dans laquelle *o* est le centre de la surface, est constante quel que soit le tétraèdre *abcd*. Donner la valeur de la constante. (On désigne par (a, A) la distance du point *a* au plan A, etc.) (H. FAURE.)

997. Trouver le lieu des centres des circonférences doublement tangentes à un limaçon de Pascal.

(H. BROCARD.)

SUR LA CONSTRUCTION GRAPHIQUE DE LA COURBE D'OMBRE OU DE PÉNOMBRE PENDANT LA DURÉE D'UNE ÉCLIPSE DE SOLEIL;

PAR M. CAYLEY.

(Traduit de l'anglais. Extrait des *Monthly Notices*, etc., avril 1870.)

La courbe en question, soit la courbe de pénombre, est l'intersection d'une sphère par un cône droit; je veux montrer que la projection stéréographique de cette courbe peut être considérée comme l'enveloppe d'un cercle variable, dont le centre décrit une conique donnée et qui coupe orthogonalement un cercle fixe; ce cercle fixe est d'ailleurs la projection du cercle suivant lequel la sphère est coupée par le plan passant par le centre de cette sphère et par le centre du cône, autrement dit, par le plan axial.

La construction à laquelle on arrive ainsi, est celle que M. Casey a donnée pour les quartiques bi-circulaires (*), et il ne serait pas difficile de prouver qu'effectivement la projection stéréographique de la courbe de pénombre est une quartique bi-circulaire.

La construction indiquée repose sur cette remarque, qu'un cône droit peut être considéré comme l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur une ligne droite et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à un point fixe de la droite, et sur le théorème suivant de Géométrie plane:

(*) Courbes du quatrième degré ayant pour points doubles les deux points de la droite de l'infini communs à tous les cercles du plan.
(*Note du Traducteur.*)

Étant donnés un cercle fixe et un cercle variable dont le centre est sur une droite donnée, et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à un point fixe de la droite (ou, ce qui revient au même, qui est tangent à une droite fixe), le lieu du pôle, par rapport au cercle fixe, de la corde commune aux deux cercles (ou, ce qui est la même chose, le lieu du centre du cercle qui coupe orthogonalement le cercle fixe et passe par les points d'intersection du cercle fixe et du cercle variable), est une conique.

Pour fixer les idées, soient P le centre du cercle variable, AB la corde qu'il a en commun avec le cercle, Q le centre du cercle qui passe par les points A et B et coupe le cercle fixe orthogonalement : le lieu du point Q est une conique.

Pour le prouver, soit

$$x^2 + y^2 = 1$$

l'équation du cercle fixe ; et

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$$

l'équation du cercle variable.

La loi de variation à laquelle il est assujetti revient à dire que α, β, γ sont des fonctions linéaires d'un paramètre variable θ ; l'équation de la corde commune AB est

$$-2\alpha x - 2\beta y + 1 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0,$$

équation qui renferme θ au carré ; on en conclut que l'enveloppe de la corde commune est une conique ; le lieu du pôle de AB, par rapport au cercle fixe, c'est-à-dire le lieu du point Q, est donc aussi une conique.

Considérons maintenant, dans l'espace, une figure dans laquelle les cercles sont remplacés par des sphères. On a une sphère fixe et une sphère variable ayant son centre

sur une droite donnée, son rayon étant proportionnel à la distance du centre à un point de la droite donnée. L'enveloppe de la sphère variable est un cône droit; l'intersection du cône avec la sphère fixe est l'enveloppe du petit cercle AB, qui résulte de l'intersection de la sphère fixe avec la sphère mobile. Ce cercle AB est aussi l'intersection de la sphère fixe par une sphère qui la coupe orthogonalement; en se reportant à ce qui a été dit plus haut, on voit que le lieu du centre Q de cette sphère est une conique.

La courbe de pénombre est donc l'enveloppe d'un cercle AB, qui résulte de l'intersection d'une sphère fixe par une sphère coupant celle-ci orthogonalement et ayant son centre sur une conique.

Il est évident que le cercle AB coupe orthogonalement le grand cercle qui résulte de l'intersection de la sphère fixe par le plan axial, cercle que j'appellerai le *cercle axial*.

Faisons maintenant une projection stéréographique de toute la figure; le cercle AB a pour projection un cercle variable coupant orthogonalement le cercle qui est la projection du cercle axial et qui a pour centre le point Q', projection du point Q. Mais le lieu du point Q est une conique; il en est donc de même du lieu du point Q'. Donc la projection de la courbe de pénombre est l'enveloppe d'un cercle variable dont le centre décrit une conique et qui coupe orthogonalement un cercle fixe.

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR M. LAGUERRE.

M. Cayley, dans la Note qui précède, attribue à M. Casey l'élégant théorème qui permet de construire la

courbe de pénombre comme l'enveloppe d'une série de cercles; j'ignore dans quel Mémoire et à quelle époque M. Casey a énoncé cette propriété; je crois devoir toutefois rappeler que M. Moutard l'avait fait connaître dès 1862.

A cette époque, il avait énoncé la proposition suivante : *Toute anallagmatique du quatrième ordre* (quartique bi-circulaire de M. Cayley) *peut être considérée de quatre façons différentes comme l'enveloppe de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe, tandis que leurs centres décrivent des coniques; les quatre coniques au moyen desquelles on peut engendrer ainsi la courbe sont homofocales* (*).

J'ai démontré très-simplement, dans une Note insérée au *Bulletin de la Société Philomathique* sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré (mars 1867), que la projection stéréographique d'une courbe de cette espèce pouvait être, comme l'indique la proposition de M. Moutard, regardée comme l'enveloppe de cercles.

Je reproduis ici cette démonstration.

Considérons une courbe K résultant de l'intersection d'une sphère S, par une surface du second degré. On peut, par cette courbe, faire passer quatre cônes. Soit (C) l'un de ces cônes, c son sommet.

Le cône (C) étant l'enveloppe des divers plans qui lui sont tangents, la courbe K est l'enveloppe des cercles suivant lesquels ces plans tangents coupent la sphère. Les plans de ces cercles passant par le point c, ces cercles eux-mêmes coupent à angles droits le cercle Γ suivant

(*) Voir la Note : *Sur les arcs des courbes planes et sphériques considérées comme enveloppes de cercles;* par M. Mannheim (*Journal de Liouville*, 1862) et ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes planes* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1865).

equel la sphère est coupée par le plan polaire de c. Les pôles des plans de ces cercles décrivent une conique G, qui est la polaire du cône (C).

La courbe K peut donc être considérée comme l'enveloppe de cercles qui coupent orthogonalement le cercle Γ, les pôles des plans de ces cercles décrivant une conique G.

Faisons maintenant une projection stéréographique de la figure.

La courbe K se projette suivant une courbe k, qui est l'enveloppe des cercles h suivant lesquels se projettent les cercles de la sphère dont l'enveloppe est K.

Ces cercles h coupent orthogonalement le cercle γ, projection de Γ; de plus, leurs centres décrivent la conique projection de G, en vertu du théorème bien connu de M. Chasles :

Si l'on projette un cercle stéréographiquement, le centre du cercle suivant lequel il se projette est la projection du pôle, par rapport à la sphère, du plan du cercle projeté.

La courbe K étant située sur quatre cônes du second degré, la proposition de M. Moutard se déduit immédiatement de ce qui précède.

Pour les développements auxquels peut donner lieu cette question, je renverrai le lecteur à la Note que j'ai citée plus haut.

MÉTHODE ET FORMULE

pour la résolution des équations du troisième degré;

PAR M. ROGER ALEXANDRE.

La méthode que nous donnons ici n'est autre que celle que nous avons exposée dans le numéro d'août 1866

des *Annales* (*), simplifiée conformément à une Note insérée dans le numéro de novembre de la même année (**), et augmentée de quelques résultats que nous croyons inédits.

Il convient d'ajouter que cette méthode ne saurait être considérée comme absolument nouvelle. Elle se ramène au procédé général de transformation linéaire qui a déjà été appliqué à la résolution des équations du troisième degré (***), ou encore, ce qui revient au même (****), à la méthode de Tschirnaüs, qui permet de réduire une équation à ses deux termes extrêmes (*****).

Toute notre prétention doit donc se borner à présenter une solution connue, sous une forme peut-être plus simple et plus heureuse.

Proposons-nous de résoudre l'équation générale du troisième degré

(1) $$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

en la ramenant à une équation de la forme

(2) $$(X + a)^3 = b,$$

qui, développée, peut s'écrire

$$X^3 + 3aX^2 + 3a^2X + a^3 - b = 0,$$

et dans laquelle X représente une fonction de x, et a, b, des quantités indépendantes de cette inconnue.

Pour que X fût l'inconnue x elle-même, il faudrait que l'on eût à la fois

$$p = 3a, \quad q = 3a^2, \quad r = a^3 - b,$$

(*) 2e série, t. V, p. 358.

(**) *Ibid.*, p. 527.

(***) Voir le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, t. I, nos 57 et suiv., et surtout no 63 (3e édit.).

(****) Voir *ibid.*, no 183, p. 407.

(*****) Voir *ibid.*, no 191.

ce qui ne peut avoir lieu que si p et q satisfont à la condition $p^2 - 3q = 0$, tirée des deux premières égalités.

Il résulte de ce que nous venons de dire, que *toute équation complète du troisième degré dont les deux premiers coefficients satisfont à la relation $p^2 - 3q = 0$, peut être immédiatement résolue.*

C'est sur ce principe que notre méthode est fondée.

Dans l'équation (1), remplaçons x par $y + h$, y étant une nouvelle inconnue, et h une quantité que nous nous réservons de déterminer en fonction des coefficients p, q, r; nous aurons une équation qui, ordonnée par rapport à y, peut s'écrire

$$(3) \qquad y^3 + p'y^2 + q'y + r' = 0,$$

et dont les coefficients ont pour valeurs

$$p' = 3h + p,$$
$$q' = 3h^2 + 2ph + q,$$
$$r' = h^3 + ph^2 + qh + r.$$

Si, à l'aide de l'indéterminée h, nous pouvions réaliser la relation $p'^2 - 3q' = 0$, l'équation (3) serait résolue. Mais si l'on remplace p' et q' par leurs valeurs, on trouve

$$(4) \qquad p'^2 - 3q' = p^2 - 3q,$$

c'est-à-dire qu'aucune valeur de h ne répond à la question.

Il n'en sera pas de même si, après avoir divisé tous les termes de l'équation (3) par $y^3 r'$, ce qui permet de l'écrire sous la forme

$$(5) \qquad \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \frac{q'}{r'}\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{p'}{r'}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{r'} = 0,$$

nous posons, entre les coefficients de cette nouvelle équa-

tion, la relation suivante (analogue à $p^2 - 3q = 0$) :

$$\left(\frac{q'}{r'}\right)^2 - 3\left(\frac{p'}{r'}\right) = 0,$$

ou

$$q'^2 - 3p'r' = 0.$$

Remplaçant p', q', r' par leurs valeurs, on arrive à une équation en h qui se réduit à

(6) $$(p^2 - 3q)h^2 + (pq - 9r)h + (q^2 - 3pr) = 0.$$

Si donc on prend pour h l'une quelconque des deux valeurs tirées de cette équation, l'équation (5) pourra être assimilée à l'équation (2), et résolue par rapport à $\frac{1}{y}$.

Or, les racines de l'équation (2) sont données par la formule

$$X = a + \sqrt[3]{b},$$

les trois valeurs de X correspondant aux trois valeurs du radical.

Dans le cas qui nous occupe, nous aurons la valeur de a en divisant membre à membre les deux égalités

$$\frac{q'}{r'} = 3a, \quad \text{et} \quad \frac{p'}{r'} = 3a^2,$$

d'où

$$a = \frac{p'}{q'};$$

par suite, on aura

$$b = \left(\frac{p'}{q'}\right)^3 - \frac{1}{r'} = \frac{p'^3}{q'^3} - \frac{3p'}{q'^2} = \frac{p'}{q'^3}(p'^2 - 3q').$$

Les racines de l'équation (5) seront donc données par

la formule

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{y}\right) &= -\frac{p'}{q'} + \sqrt[3]{\frac{p'}{q'^3}(p'^2 - 3q')} \\ &= \frac{-p' + \sqrt[3]{p'(p'^2 - 3q')}}{q'}, \end{aligned} \right.$$

et l'on en déduira celles de l'équation (1):

$$x = y + h = \frac{q'}{-p' + \sqrt[3]{p'(p'^2 - 3q')}} + h.$$

En remplaçant p' et q' par leurs valeurs, et ayant égard à la relation (4), nous obtiendrons l'expression générale

$$(8)\qquad x = \frac{3h^2 + 2ph + q}{-(3h+p) + \sqrt[3]{(3h+p)(p^2 - 3q)}} + h,$$

qui peut encore s'écrire

$$(9)\qquad x = \frac{ph + q + h\sqrt[3]{(3h+p)(p^2 - 3q)}}{-(3h+p) + \sqrt[3]{(3h+p)(p^2 - 3q)}}.$$

En joignant à cette formule l'expression de h tirée de la résolvante (6), nous aurons tous les éléments nécessaires pour résoudre l'équation générale du troisième degré.

Cette expression est

$$h = \frac{9r - pq \pm \sqrt{(9r - pq)^2 - 4(p^2 - 3q)(q^2 - 3pr)}}{2(p^2 - 3q)}.$$

Toutes les fois que la quantité placée sous le radical est la négative, on se trouvera dans le cas dit *irréductible*.

Cas particuliers.

L'examen de la résolvante (6) nous amène à considérer les cas où l'un de ses trois coefficients s'annule.

Quand $p^2 - 3q = 0$, la formule générale n'est plus applicable. En effet, la valeur de h, qui se réduit à $-\frac{p}{3}$,

annule à la fois (dans ce cas seulement) les deux coefficients p' et q' de l'équation (3), ce qui donnerait $\frac{1}{y} = \frac{0}{0}$ [formule (7)], si l'on voulait procéder comme nous avons fait.

Nous savons, d'ailleurs, que, dans ce cas, l'équation (1) peut être immédiatement résolue.

Quand on a $q^2 - 3pr = 0$, h peut recevoir une valeur nulle, et l'équation (1) peut être résolue par rapport à $\frac{1}{x}$, comme l'équation (3) l'a été par rapport à $\frac{1}{y}$.

Si l'on a enfin $qr - pq = 0$, la valeur de h se réduit à $\pm\sqrt{\frac{q}{3}} = \frac{\pm\sqrt{3q}}{3}$, et la formule générale peut être mise sous une forme beaucoup plus élégante.

En effet, si l'on remarque que $q = 3h^2$, et que l'on a par suite

$$(3h + p)(p^2 - 3q) = (p + 3h)^2(p - 3h),$$

la formule (9) pourra s'écrire

$$x = \frac{h(p + 3h) + h\sqrt[3]{(p + 3h)^3\left(\frac{p - 3h}{p + 3h}\right)}}{-(p + 3h) + \sqrt[3]{(p + 3h)^3\left(\frac{p - 3h}{p + 3h}\right)}},$$

et enfin

$$x = h\,\frac{\sqrt[3]{p - 3h} + \sqrt[3]{p + 3h}}{\sqrt[3]{p - 3h} - \sqrt[3]{p + 3h}},$$

ou encore, l'équation proposée étant $f(x) = 0$,

$$x = h\,\frac{\sqrt[3]{f''(-h)} + \sqrt[3]{f''(h)}}{\sqrt[3]{f''(-h)} - \sqrt[3]{f''(h)}}\ (*).$$

(*) En mettant ici en évidence les racines cubiques de l'unité, comme nous le ferons tout à l'heure à propos d'un autre cas, on verrait que cette formule ne doit donner que les trois racines de l'équation proposée.

Si l'on prend pour h le signe $+$, on a

$$(10) \qquad x = \frac{\sqrt{3q}}{3} \frac{\sqrt[3]{p - \sqrt{3q}} + \sqrt[3]{p + \sqrt{3q}}}{\sqrt[3]{p - \sqrt{3q}} - \sqrt[3]{p + \sqrt{3q}}} \; (*).$$

Cette formule peut être considérée comme générale au même titre que la formule de Cardan, relative, comme on sait, à une équation préalablement débarrassée du terme en x^2.

On peut en effet toujours passer d'une équation quelconque à une autre équation dans laquelle les coefficients satisfont à la relation $9r - pq = 0$, à l'aide d'une quantité H, analogue à h, et exprimée *rationnellement* en fonction des coefficients P, Q, R, de l'équation proposée.

(*) Il est facile d'arriver directement à cette expression des racines de l'équation préparée

$$x^3 + px^2 + qx + \frac{pq}{9} = 0,$$

en y substituant $x = a\frac{y+1}{y-1}$, a étant une indéterminée et y une nouvelle inconnue.

On arrive à une équation qui peut s'écrire

$$a(a^2+q)(y^3+1) + p\left(a^2 + \frac{q}{9}\right)(y^3 - 1)$$
$$+ ay(3a^2 - q)(y+1) + py\left(a^2 - \frac{q}{3}\right)(y - 1) = 0.$$

Si l'on pose $3a^2 = q$, d'où $a = \pm\sqrt{\frac{q}{3}} = \frac{\pm\sqrt{3q}}{3}$, les deux derniers termes s'évanouiront, et, en remplaçant a^2 par sa valeur dans les deux premiers, on trouvera

$$y^3 = \frac{p - 3a}{p + 3a},$$

d'où l'on conclut, en prenant le signe $+$ pour a,

$$x = \frac{\sqrt{3q}}{3} \frac{\sqrt[3]{p - \sqrt{3q}} + \sqrt[3]{p + \sqrt{3q}}}{\sqrt[3]{p - \sqrt{3q}} - \sqrt[3]{p + \sqrt{3q}}}.$$

Il suffit pour cela de poser entre les coefficients

$$p = 3H + P, \quad q = 3H^2 + 2PH + Q,$$
$$r = H^3 + PH^2 + QH + R,$$

la relation

$$9r - pq = 0.$$

On voit, en effectuant les calculs, que cela revient à poser

$$2(3Q - P^2)H + (9R - PQ) = 0,$$

d'où l'on tire

$$H = \frac{9R - PQ}{2(P^2 - 3Q)},$$

quantité qu'il suffira d'ajouter à la formule (10) pour avoir l'expression des trois racines de l'équation générale proposée.

Nous examinerons en dernier lieu le cas où l'on a $p = 0$ dans l'équation générale, le seul auquel s'applique la formule de Cardan,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}.$$

Désignons, pour plus de simplicité, *la valeur absolue* du premier radical cubique par Y, celle du second par Z.

Faisons $p = 0$ dans la valeur de h, il vient

$$h = -\frac{9r \pm \sqrt{81r^2 + 12q^3}}{6q} = \frac{3}{q}\left(-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}\right).$$

On aura donc, selon qu'on prendra le signe + ou le signe —,

$$h_{(+)} = \frac{3}{q} Z^3, \quad h_{(-)} = \frac{3}{q} Y^3.$$

Revenons à la formule (8). On sait que, pour obtenir

les trois valeurs de x, il suffit de multiplier successivement le radical cubique intéressé dans cette formule par les trois racines cubiques de l'unité. Désignons par k l'une de ces racines, avec cette condition que partout où cette lettre se trouvera répétée dans une même formule, elle représentera *la même racine cubique de l'unité,* et en n'attribuant, dans tout ce qui va suivre, au signe $\sqrt[3]{}$ que la valeur absolue des radicaux.

D'après ces conventions, si l'on introduit l'hypothèse $p = 0$ dans la formule générale, celle-ci deviendra, (x_k désignant la racine qui corresp[illegible] k),

$$x_k = \frac{3h^2 + q}{-3h + k\sqrt[3]{-9qh}} + h = \frac{q - hk\sqrt[3]{9qh}}{-3h - k\sqrt[3]{9qh}}.$$

Si maintenant on remplace h par l'une de ses valeurs (signe $+$); si, de plus, on remarque que $-\frac{q}{3} = YZ$ (valeur absolue de $\sqrt[3]{Y^3Z^3}$), et que $k^3 = 1$ (quel que soit k), l'expression de x pourra passer successivement par toutes les formes suivantes :

$$x_{k(+)} = \frac{q - \frac{3}{q}Z^3 k\sqrt[3]{27Z^3}}{-\frac{9}{q}Z^3 - k\sqrt[3]{27Z^3}} = \frac{\frac{q^2}{9} - kZ^4}{-Z^3 - \frac{q}{3}kZ}$$

$$= \frac{Y^2Z^2 - kZ^4}{kYZ^2 - Z^3} = \frac{k^3Y^2 - kZ^2}{kY - Z}$$

$$= \frac{k^4Y^2 - k^2Z^2}{k^2Y - kZ} = k^2Y + kZ.$$

Si l'on avait pris $h_{(-)} = \frac{3}{q}Y^3$, on aurait obtenu, en suivant une marche identique,

$$x_{k(-)} = k^2Z + kY.$$

On reconnaît aisément dans l'une et l'autre de ces deux expressions la formule de Cardan, dont la signification se trouve précisée et restreinte exclusivement à celle des trois racines de l'équation proposée.

Soient 1, α, β les trois racines cubiques de l'unité; en remplaçant successivement k par l'une de ces valeurs dans les deux formules précédentes, et en ayant égard aux relations connues $\alpha^2 = \beta$, $\alpha = \beta^2$, on obtient également les trois racines, mais dans un ordre différent :

$$x_{1(+)} = \mathrm{Y} + \mathrm{Z}, \qquad x_{1(-)} = \mathrm{Z} + \mathrm{Y},$$
$$x_{\alpha(+)} = \text{[illegible]} + \alpha \mathrm{Z}, \qquad x_{\alpha(-)} = \beta \mathrm{Z} + \alpha \mathrm{Y},$$
$$x_{\beta(+)} = \alpha \mathrm{Y} + \beta \mathrm{Z}, \qquad x_{\beta(-)} = \alpha \mathrm{Z} + \beta \mathrm{Y}.$$

MÉMOIRE SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES RÉSIDUS NUMÉRIQUES

(suite, voir 2e série, t. IX, p. 221 et 271);

PAR MM. A. LAISANT ET ÉTIENNE BEAUJEUX.

---

16. Soit donc une progression géométrique

$$\mathrm{A}q, \quad \mathrm{A}q^2, \ldots, \quad \mathrm{A}q^n, \ldots,$$

dont les termes, divisés par D, donnent lieu à une simple période de n restes

$$r_1, \quad r_2, \ldots, \quad r_n, \ldots.$$

De sorte que $r_n = r_0 = \mathrm{A}$, $r_{n+1} = r_1$, $r_{n+2} = r_2, \ldots$, en général $r_{kn+p} = r_p$. On voit que dans toute relation établissant un caractère de divisibilité par D, on pourra remplacer un reste quelconque r_p par $\mathrm{A}q^p$, puis ajouter à p ou en retrancher un multiple quelconque de n. Nous aurons en premier lieu le théorème suivant :

Le produit $r_1 r_2 \ldots r_n$ de tous les restes de la période est égal à un multiple de D, $+$ A^n *si n est impair, et à un multiple de D,* — A^n *si n est pair.*

En effet, remplaçant r_1 par Aq, r_2 par $Aq^2, \ldots$, r_n par Aq^n, le produit est ramené à

$$A^n q^{1+2+\ldots+n} = A^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Soit d'abord n impair, on a (15)

$$q^n = m.D + 1;$$

donc

$$(q^n)^{\frac{n+1}{2}} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} = m.D + 1,$$

et

$$A^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = m.D + A^n.$$

Si, au contraire, n est pair, il vient

$$q^{\frac{n}{2}} = m.D - 1,$$

et

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} = m.D - 1;$$

donc

$$A^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = m.D - A^n.$$

Corollaires. — 1° Si l'on était parti de la progression $q, q^2, \ldots$, il suffirait de faire $A = 1$ dans les résultats ci-dessus, de sorte que le produit des restes eût été égal à un multiple de D, $+$ ou -1, selon que n est impair ou pair.

2° Il en serait de même si l'on avait $A^n - 1 = m.D$; ce qui aurait lieu, par exemple, si la fraction $\frac{1}{D}$, convertie dans le système de base A, conduisait aussi à une période de n chiffres.

3° Si $n = D - 1$, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque

D est premier, il en sera encore de même, car

$$A^{D-1} - 1 = m.D,$$

d'après le théorème de Fermat.

4° Si $\frac{1}{D}$ convertie dans le système de base A donne Qn chiffres à la période, on a $A^n = m.D - 1$, et le produit sera un multiple de D + ou -1, selon que n sera pair ou impair.

17. *La somme de tous les restes composant la période est égale à un multiple de* D.

Si nous remplaçons, en effet, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ comme ci-dessus, il vient

$$Aq + Aq^2 + \ldots + Aq^n = Aq\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right).$$

Cette expression représente un multiple de D, car D entre comme facteur dans $q^n - 1$, et ne saurait entrer dans $q - 1$.

18. *La somme des puissances semblables des restes composant la période est égale à un multiple de* D, *pourvu que l'exposant commun ne soit pas multiple du nombre des restes composant la période.*

Car si nous remplaçons encore $r_1, r_2, \ldots$ par $Aq, Aq^2, \ldots,$

$$r_1^p + r_2^p + r_3^p + \ldots + r_n^p$$

sera remplacé par

$$A^p q^p + A^p q^{2p} + \ldots + A^p q^{np} = A^p q^p \frac{q^{np} - 1}{q^p - 1}.$$

Or $q^{np} - 1 = m.D$ et $q^p - 1 \gtrless m.D$, puisque $p \gtrless m.D$.

Donc, etc.

Si p était multiple de n, la somme ci-dessus serait évidemment de la forme $m.D + n$, car chacun des termes $r_1^p, \ldots$ serait égal à un multiple de D, $+1$, et il y en a n.

19. On pourrait voir d'une façon analogue que *la somme des produits* $r_1 r_2, r_2 r_3, \ldots, r_n r_1$ *est un multiple de* D; qu'il en est de même de *la somme de tous les produits deux à deux des restes.* Mais nous allons préférablement établir ce théorème général qui comprend les précédents comme cas très-particuliers :

Si l'on forme une fonction symétrique entière quelconque des restes $r_1 r_2 \ldots r_n$, *sa valeur numérique sera multiple de* D, *pourvu qu'il n'y ait aucun terme dans la fonction dont le degré soit multiple du nombre des termes de la période.*

Soit en effet $\mathrm{B} r_i^l r_j^m \ldots r_k^p$ un des termes de cette fonction. Elle devra renfermer aussi tous ceux qu'on déduirait de ceux-là, en faisant passer respectivement les indices par les valeurs

$$\begin{array}{l} i+1,\ i+2, \ldots,\ i-1, \\ j+1,\ j+2, \ldots,\ j-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k+1,\ k+2, \ldots,\ k+1. \end{array}$$

Mais si l'on se rappelle que, d'une façon générale, on a

$$r_h = r_{h+n},$$

on voit que les valeurs successives à donner aux indices s'obtiennent en augmentant successivement les premiers de $1, 2, \ldots, (n-1)$ unités. Ainsi le terme considéré $\mathrm{B} r_i^l r_j^m \ldots r_k^p$, entraîne l'existence des suivantes :

$$\begin{array}{l} \mathrm{B} r_{i+1}^l r_{j+1} \ldots r_{k+1}^p, \\ \mathrm{B} r_{i+2}^l r_{j+2}^m \ldots r_{k+2}^p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{B} r_{i+n-1}^l r_{j+n-1}^m \ldots r_{k+n-1}^p. \end{array}$$

Mais, en appelant N le degré commun $l+m+\ldots+p$

des termes ci-dessus, on voit qu'ils peuvent être remplacés respectivement par

$$\mathrm{B}\,\mathrm{A}^{\mathrm{N}} q^{li+mj+\cdots+pk},$$
$$\mathrm{B}\,\mathrm{A}^{\mathrm{N}} q^{l(i+1)+m(j+1)+\cdots+p(k+1)},$$
$$\mathrm{B}\,\mathrm{A}^{\mathrm{N}} q^{l(i+2)+m(j+2)+\cdots+p(k+2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{B}\,\mathrm{A}^{\mathrm{N}} q^{l(i+n-1)+m(j+n-1)+\cdots+p(k+n-1)}.$$

La somme est donc

$$\mathrm{B}\,\mathrm{A}^{\mathrm{N}} q^{li+mj+\cdots+pk}\left[1+q^{\mathrm{N}}+q^{2\mathrm{N}}+\cdots+q^{(n-1)\mathrm{N}}\right]$$
$$=\mathrm{B}\,\mathrm{A}^{\mathrm{N}} q^{li+mj+\cdots+pk}\left(\frac{q^{n\mathrm{N}}-1}{q^{\mathrm{N}}-1}\right).$$

Cette somme est multiple de D; le dénominateur ne l'étant pas en raison de l'hypothèse, tandis que $q^{n\mathrm{N}}-1$ l'est au contraire. Il en sera de même de toutes celles qui proviendront d'un autre terme non encore considéré. Donc la valeur numérique de la fonction sera aussi un multiple du diviseur.

Remarquons, en raison même de la démonstration précédente, que la fonction pourrait n'être pas complétement symétrique sans que le théorème cessât d'avoir lieu. Il suffirait qu'elle se composât de groupes de n termes, tels qu'on pût de l'un déduire les autres en faisant successivement passer les indices par toutes les valeurs comprises entre 1 et n, inclusivement, en suivant l'ordre circulaire.

20. Le théorème précédent nous montre que la somme des n restes, la somme de leurs produits 2 à 2, de leurs produits 3 à 3,..., de leurs produits $n-1$ à $n-1$, sont autant de multiples du diviseur D. Si nous considérons en particulier le cas où $\mathrm{A}=1$, nous avons vu en outre (16) que le produit des n restes est un mul-

tiple de D, + ou — 1, selon que n est pair ou impair. Il y a là un lien curieux entre les racines de l'équation indéterminée

$$(a) \qquad x^n - 1 = m.\mathrm{D},$$

et celles de l'équation algébrique

$$(b) \qquad x^n - 1 = 0.$$

On voit, en effet, qu'en appelant $r_1, r_2, \ldots, r_n$ comme nous l'avons fait, les racines de la première, et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ celles de la seconde, on a

$$\begin{array}{ll}
\Sigma r_1 = m.\mathrm{D}, & \Sigma \rho_1 = 0, \\
\Sigma r_1 r_2 = m.\mathrm{D}, & \Sigma \rho_1 \rho_2 = 0, \\
\Sigma r_1 r_2 r_3 = m.\mathrm{D}, & \Sigma \rho_1 \rho_2 \rho_3 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Sigma r_1 \ldots r_{n-1} = m.\mathrm{D}, & \Sigma \rho_1 \ldots \rho_{n-1} = 0, \\
r_1 r_2 \ldots r_n = m.\mathrm{D} \pm 1, & \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n = \pm 1.
\end{array}$$

Si n est impair, 1 est racine de l'équation (b), et toutes les autres racines sont imaginaires. Si n est pair, cette équation admet au contraire les racines + 1 et — 1. Dans ces deux cas respectivement, l'équation (a) a pour racine $r_n = 1$, ou $r_n = 1$ et $r_{\frac{n}{r}} = \mathrm{D} - 1$. De toute façon, on voit qu'il existe entre les racines de l'équation (b), d'une part, et entre celles de l'équation (a), de l'autre, des relations exactement semblables à des multiples près de D. Cette remarque nous paraît pouvoir être ajoutée aux lumineuses considérations développées par Poinsot dans son *Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres*, et dans ses *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LES COEFFICIENTS DU BINOME DE NEWTON;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS (*),
Agrégé des Sciences mathématiques.

On sait que, pour une puissance quelconque du binôme, la somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair; la même propriété a lieu, avec certaines restrictions, en prenant les coefficients de trois en trois. On considérera les six cas suivants, selon que le reste de la division de l'exposant par 6 sera 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 :

Premier cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égale à $6n$.

Remarquons d'abord que si l'on désigne par α et α^2 les racines cubiques de l'unité, on aura

$$(1+\alpha)^3 = 2 + 3\alpha + 3\alpha^2 = (1+\alpha^2)^3,$$

et, par suite,

$$(1+\alpha)^{3p} = (1+\alpha^2)^{3p}.$$

Le nombre des coefficients de la puissance $6n$ du binôme est égal à $6n+1$. Appelons :

A la somme des coefficients de rang.	1, 4, 7,..., $(6n+1)$;
B » .	2, 5, 8,..., $(6n-1)$;
C » .	3, 6, 9,..., $6n$;

nous aurons alors

$$(1+\alpha)^{6n} = A + B\alpha + C\alpha^2$$

(*) La question a été déjà traitée d'une manière générale par M. Catalan, t. XX, p. 260. (*Note de la rédaction.*)

et

$$(1 + \alpha^2)^{6n} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, par suite, en retranchant membre à membre, nous déduisons $B = C$.

D'autre part, $(1 + \alpha)^{6n} - 1$ est divisible par $(1+\alpha)^3 + 1$, ou par $3(1 + \alpha + \alpha^2)$: donc $A - 1 + B(\alpha + \alpha^2)$ est divisible par $1 + (\alpha + \alpha^2)$, et, par suite, $A - 1 = B$. Donc :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n$ *du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales entre elles en retranchant l'unité de la première, et leur valeur est* $\frac{1}{3}(2^{6n} - 1)$.

Deuxième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égal à $6n + 3$.

On aura, comme précédemment,

$$(1 + \alpha)^{6n+3} = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

et aussi $B = C$; et comme $(1 + \alpha)^{6n+3} + 1$ est divisible par $(1 + \alpha)^3 + 1$; on en déduira $A + 1 = B$. Donc :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 3$ *du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la première, et leur valeur est* $\frac{1}{3}(2^{6n+3} + 1)$.

Troisième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égale à $6n + 1$.

Nous avons en tout $6n + 2$ coefficients, et le groupe C en contient n, les groupes A et B en contiennent $n + 1$; alors

$$(1 + \alpha)^{6n+1} = A + B\alpha + C\alpha^2.$$

On peut faire voir que les groupes A et B contiennent les mêmes coefficients dans un ordre inverse; mais on peut aussi démontrer l'égalité de A et B de la façon sui-

vante. On a

$$(1+\alpha)^{6n+1} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, en désignant $(1+\alpha)^{6n} = (1+\alpha^2)^{6n}$ par M,

$$M(1+\alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2,$$
$$M(1+\alpha^2) = A + C\alpha + B\alpha^2;$$

et en éliminant M entre ces équations, on déduit

$$(1+\alpha^2)(A + B\alpha + C\alpha^2) - (1+\alpha)(A + C\alpha + B\alpha^2) = 0,$$

ou bien

$$(B - A)(\alpha - \alpha^2) = 0,$$

et, par suite,

$$A = B.$$

D'autre part, on a

$$(1+\alpha)^{6p+1} + \alpha^2 = A + B\alpha + (C\alpha + 1)\alpha^2;$$

mais le reste de la division de $(1+\alpha)^{6p}(1+\alpha)+\alpha^2$ par $(1+\alpha)^3+1$ est égal au reste de la division de $1+\alpha+\alpha^2$ par $(1+\alpha)^3+1$; donc $A + B\alpha + (C+1)\alpha^2$ est divisible par $1+\alpha+\alpha^2$, et l'on a

$$A = B = C + 1.$$

On a donc ce théorème :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n+1$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la dernière, et égales au tiers de $2^{6n+1}+1$.

Quatrième cas. — L'exposant de la puissance du binôme est égal à $6n+4$.

On a alors le théorème suivant, analogue au précédent:

Les sommes des coefficients de la puissance $6n+4$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la dernière, et égales au tiers de $2^{6n+4}-1$.

Cinquième cas. — L'exposant du binôme est égal à $6n + 2$.

Il y a alors $6n + 3$ coefficients et $n + 1$ par groupes, en tenant compte du dernier qui est l'unité ; on démontrerait, comme ci-dessus, le théorème suivant :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 2$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la seconde, et égales au tiers de $2^{6n+2} - 1$.

Sixième cas. — L'exposant du binôme est égal à $6n + 5$.

On a alors le théorème suivant :

Les sommes des coefficients de la puissance $6n + 5$ du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la seconde, et égales au tiers de $2^{6n+5} + 1$.

Remarque. — On aurait d'ailleurs, et par le même procédé, des théorèmes analogues pour les sommes des coefficients pris de quatre en quatre, de cinq en cinq, etc.

NOTE SUR L'EXPRESSION DE LA DISTANCE ENTRE QUELQUES POINTS REMARQUABLES D'UN TRIANGLE ABC ;

Par M. E. LEMOINE,
Professeur.

---

a, b, c sont les longueurs des trois côtés BC, AC, AB ;

R, r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits ;

O, I, I_a, I_b, I_c les centres de ces mêmes cercles ;

M, N, H le centre de gravité du triangle, le centre

du cercle des neuf points, le point de concours des hauteurs.

Lemme I. — *Soit* μ *un point du plan du triangle* ABC; *soient* M_a, M_b, M_c *les milieux de ses côtés; si l'on mène respectivement par* M_a, M_b, M_c *des parallèles à* $A\mu$, $B\mu$, $C\mu$:

1° *Ces trois droites se couperont au point* ω;

2° ω M *et* μ *sont en ligne droite;*

3° $\dfrac{OM}{M\mu} = \frac{1}{2}$.

Cela résulte immédiatement de l'homothétie inverse des triangles ABC, $M_a M_b M_c$, avec M pour centre d'homothétie.

Lemme II. — *On a avec les mêmes notations*

$$4\overline{\mu\omega}^2 = 3(\overline{\mu A}^2 + \overline{\mu B}^2 + \overline{\mu C}^2) - (a^2 + b^2 + c^2).$$

En effet, d'après le théorème qui donne la somme des carrés des distances d'un point μ à trois autres A, B, C en fonction des distances de ces points au centre de gravité M, on a

$$\overline{\mu A}^2 + \overline{\mu B}^2 + \overline{\mu C}^2 = 3\overline{\mu M}^2 + \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2.$$

Mais dans un triangle, on a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

et, d'après le lemme I, on a

$$\mu M = \frac{2}{3}\mu\omega;$$

donc enfin

$$4\overline{\mu\omega}^2 = 3(\overline{\mu A}^2 + \overline{\mu B}^2 + \overline{\mu C}^2) - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Lemme III. — *Si, dans un triangle* ABC, *on prend sur* BC *un point* S *tel que* $\frac{SC}{SB} = \frac{1}{2}$, *on aura*

$$\overline{AS}^2 = \frac{6b^2 + 3c^2 - 2a^2}{9}.$$

Théorème I. — *La distance du point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit a pour expression*

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

En effet, prenons le point O pour point appelé μ dans les lemmes I et II, on aura

$$4\overline{O\omega}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

D'après le lemme I, on a

$$OM = \tfrac{2}{3} O\omega.$$

Du reste, on sait que, dans un triangle, on a

$$OM = \tfrac{1}{3} OH;$$

donc

$$OH = 2 O\omega,$$

et par suite

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Remarque. — Le point ω est ici le milieu de OH, c'est-à-dire le centre N du cercle des neuf points.

Théorème II. — *La distance du point de concours des hauteurs au centre du cercle inscrit est donnée par*

$$\overline{IH}^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Celle du point de concours des hauteurs au centre du

cercle exinscrit I_a *par*

$$\overline{I_aH}^2 = 4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Dans le triangle IOH, la médiane IN est $\frac{R}{2} - r$, puisque le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit; mais on a

$$\overline{OI}^2 + \overline{IH}^2 = 2\overline{IN}^2 + \frac{\overline{OH}^2}{2};$$

donc

$$R(R-2r) + \overline{IH}^2 = 2\left(\frac{R}{2} - r\right)^2 + \frac{9R^2}{2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{2};$$

d'où enfin

$$\overline{IH}^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

On établirait de même la formule relative au cercle exinscrit en considérant le triangle I_aOH.

Théorème III. — *La distance du centre du cercle inscrit au centre de gravité est donnée par la formule*

$$IM^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 6r(2R-r)\right];$$

celle du centre du cercle exinscrit de centre I_a *par*

$$\overline{I_aM}^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 6r_a(2R+r_a)\right].$$

Dans le triangle ION, on a

$$\frac{MN}{MO} = \frac{1}{2}.$$

On peut donc calculer MI par la formule du lemme III.

et l'on aura

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \frac{6\left(\frac{R-2r}{2}\right)^2 + 3(R^2-2Rr) - \left[\frac{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\right]}{9};$$

d'où

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \tfrac{1}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 6r(2R-r)\right].$$

En considérant le triangle I_aON, on aurait la formule relative au cercle exinscrit.

Remarque. — On a

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = R(R-2r),$$
$$\mathrm{IN} = \tfrac{1}{2}(R-2r);$$

d'où

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = 2R.\mathrm{IN},$$

c'est-à-dire que :

La distance des centres des cercles circonscrit et inscrit est moyenne proportionnelle entre le diamètre du cercle circonscrit et la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle des neuf points.

On a aussi

$$\overline{\mathrm{OI}_a}^2 = 2R.\mathrm{I}_a\mathrm{N}, \ldots.$$

PROBLÈME D'EULER.

Euler s'est occupé de construire un triangle, connaissant les trois points que nous avons nommés I, M, H. Nous allons déduire de ce qui précède une solution de la plus grande simplicité.

En prolongeant HM de $\mathrm{MO} = \frac{\mathrm{HM}}{2}$, on aura O, centre du cercle circonscrit.

Le milieu N de OH sera le centre du cercle des neuf points. Donc, d'après la remarque du théorème III,

$$R = \frac{\overline{OI}^2}{2\,IN}.$$

Mais de $IN = \frac{R}{2} - r$, on tire

$$r = \frac{R}{2} - IN;$$

d'où

$$r = \frac{\overline{OI}^2 - 4\overline{IN}^2}{4\,IN}.$$

Cela posé, remarquons que : *Dans tout triangle il y a une conique inscrite qui a pour foyers les points* O *et* H, *et dont un axe est égal à* R. (Voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 240.)

Cette conique est ici déterminée; il suffira donc, pour trouver les côtés, de mener les tangentes communes à cette conique et au cercle inscrit : problème qu'on ne peut généralement résoudre avec la règle et le compas.

M. Vieille (voir *Nouvelles Annales*, mai 1855) a inséré une solution du problème d'Euler dans un cas où celui-ci est résoluble par la règle et le compas. Il suppose I, M, H en ligne droite. Le triangle cherché est alors isoscèle, et l'on voit ici la solution immédiate de la question.

Remarque. — Si, dans le problème précédent, I est remplacé par I_a, une marche absolument analogue en donne la solution.

THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE (*);

PAR M. J. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée de Bruges (Belgique).

1. Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma A_{rs} x_r x_s = 0$ ou simplement $f(x) = 0$ l'équation homogène d'une surface du second ordre rapportée à des axes rectangulaires quelconques. Désignons par m_1, m_2, m_3 les cosinus directeurs d'une sécante quelconque passant par le point $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$; les cordonnées du point M situé sur cette sécante à la distance ρ de A peuvent être représentées par $\alpha_r + m_r \rho$, où m_4 est un cosinus directeur fictif qu'il faut supposer égal à zéro. Si M est sur la surface, on a $f(\alpha + m\rho) = 0$, ou

$$\rho^2 f(m) + \rho \Sigma m_1 f_1(\alpha) + f(\alpha) = 0,$$

$f_r(\alpha)$ tenant lieu de $\frac{df(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}{d\alpha_r}$.

Les racines de cette équation donnent les distances de A aux deux points d'intersection M et M' de la sécante et de la surface, ces distances étant de même signe ou non, suivant que M et M' sont d'un même côté ou de part et d'autre de A. Nous aurons donc

$$AM.AM' = \frac{f(\alpha)}{f(m)}.$$

Une sécante conduite par le point B parallèlement à

(*) Ces développements renferment les solutions des Questions 837, 918, 919, 920 et 921. (*Voir* 2e série, t. VI, p. 527, et t. VIII, p. 96.)

AM, et coupant la surface en N et N′, donnerait de même

$$\mathrm{BN}.\mathrm{BN}' = \frac{f(\beta)}{f(m)}.$$

Par conséquent, le rapport

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{AM}.\mathrm{AM}'}{\mathrm{BN}.\mathrm{BN}'} = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$$

et est indépendant de la direction des parallèles menées par A et par B (Théorème connu de Newton). Si l'on suppose B fixe et A variable, ce rapport pourrait être appelé la *caractéristique* du point A. Plus particulièrement, si B coïncide avec le centre O de la surface, on a $\mathrm{ON} = -\mathrm{ON}'$, et le rapport $\frac{\mathrm{AM}.\mathrm{AM}'}{\mathrm{ON}^2} = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ prend le nom d'*indice* du point variable A.

L'indice est *négatif* ou *positif*, suivant que le point A et le centre O appartiennent à la même région de la surface ou non; l'indice d'un point de la surface est nul, et celui du centre vaut -1. L'indice d'un point par rapport à une sphère est égal à sa puissance divisée par le carré du rayon.

Si la surface est représentée par l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'indice du point (x_1, x_2, x_3) est égal au premier membre de cette équation. Si les axes sont quelconques, la quantité $f(\beta)$ résulte de l'élimination de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ entre les quatre équations

$$\tfrac{1}{2} f_r(\beta) = \mathrm{A}_{r1}\beta_1 + \mathrm{A}_{r2}\beta_2 + \mathrm{A}_{r3}\beta_3 + \mathrm{A}_{r4}\beta_4 = 0 \ (r = 1, 2, 3),$$
$$\mathrm{A}_{41}\beta_1 + \mathrm{A}_{42}\beta_2 + \mathrm{A}_{43}\beta_3 + \mathrm{A}_{44}\beta_4 = f(\beta),$$

à cause de $f(\beta) = \frac{1}{2}\Sigma\beta_1 f_1(\beta) = \frac{1}{2}\beta_4 f_4(\beta)$, $\beta_4 = 1$. Nous

trouvons

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} - f(\beta) \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en désignant par H le déterminant (Hessien) des coefficients A_{rs} et par B_{rs} le mineur $\frac{dH}{dA_{rs}}$,

$$f(\beta) = \frac{H}{B_{44}},$$

et par suite, I_x étant l'indice du point x,

(2) $$I_x = -f(x)\frac{B_{44}}{H},$$

valeur indiquée sans démonstration par M. Faure (t. V, 2e série, p. 10).

Bien que l'équation (1) ait été obtenue en supposant des axes coordonnés rectangulaires, il est évident qu'elle subsiste encore pour des axes obliques et même pour des coordonnées tétraédriques (*). La valeur (2) est donc également applicable aux coordonnées cartésiennes obliques. Mais, pour des coordonnées tétraédriques liées par l'identité

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 = 1,$$

on obtient le centre β en identifiant les équations $\Sigma x_1 f_1(\beta) = 0$ et $\Sigma k_1 x_1 = 0$, qui représentent respectivement le plan polaire du point β et le plan de l'infini.

(*) A cause du caractère *covariant* des quantités $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. Car, si $F(x') = 0$ est l'équation de la surface en d'autres coordonnées, une transformation de coordonnées change $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ en $\lambda F(\alpha')$ et $\lambda F(\beta')$, où λ est un facteur constant et α'_r, β_r, x'_r les nouvelles coordonnées des points A, B, X.

Nous aurons ainsi, μ étant un facteur indéterminé,

$$\tfrac{1}{2}f_r(\beta) = A_{r1}\beta_1 + A_{r2}\beta_2 + A_{r3}\beta_3 + A_{r4}\beta_4 = \mu k_r (r = 1, 2, 3, 4),$$
$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = 1,$$
$$f(\beta) = \tfrac{1}{2}\Sigma\beta_1 f_1(\beta) = \Sigma\mu k_1\beta_1 = \mu,$$

et, en éliminant les β entre les cinq premières équations,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & k_1 f(\beta) \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & k_2 f(\beta) \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & k_3 f(\beta) \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & k_4 f(\beta) \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On tire de là

$$f(\beta) = -\frac{H}{\begin{pmatrix} H & {}^{k} \\ & {}_{k} \end{pmatrix}},$$

la notation $\begin{pmatrix} H & {}^{k, l, \ldots} \\ & {}_{p, q, \ldots} \end{pmatrix}$ servant à désigner le *Hessien bordé* des colonnes (k_1, k_2, k_3, k_4), $(l_1, l_2, l_3, l_4), \ldots$, et des lignes (p_1, p_2, p_3, p_4), $(q_1, q_2, q_3, q_4), \ldots$.

2. Passons à quelques transformations de l'indice. En menant la sécante AM par le centre O, nous aurons $I_a = \frac{AM.AM'}{OM^2}$. Soit A′ le point où OA est rencontré par le plan polaire de A; les points A et A′ qui divisent le diamètre MM′ harmoniquement, et que nous appellerons *points réciproques*, donnent les relations

$$AM.AM' = AA'.AO, \quad OM^2 = OA.OA'.$$

Par conséquent, $I_a = -\frac{AA'}{OA'}$, c'est-à-dire *l'indice d'un point est égal au rapport, changé de signe, des dis-*

ances de ce point et du centre de la surface au plan polaire de ce point. C'est la définition proposée par M. Faure, 2e série, t. VIII, p. 95, et déjà indiquée, 2e série, t. V, p. 9.

Si le point A est intérieur à la surface (*), soient AM une demi-corde conjuguée avec OA, et Om le demi-diamètre parallèle; on a $I_a = -\frac{AM^2}{Om^2}$. Désignons par B l'extrémité du diamètre OA et par C celle du diamètre conjugué avec le plan OAM; le volume V du parallélépipède construit sur le tétraèdre OBMC est ce que M. Aoust nomme la *puissance* du point A. Comme les tétraèdres OBMC et $OBmC$ ont même base OBC et des hauteurs proportionnelles aux parallèles AM et Om, on reconnaît immédiatement que $\frac{V}{abc} = \frac{AM}{Om}$; par suite, $I_a = -\frac{V^2}{a^2b^2c^2}$, le tétraèdre $OBmC$ étant équivalent à celui qui est construit sur les demi-axes principaux a, b, c de la surface.

Si le point A est extérieur, menons une tangente quelconque AM, et soit Om le demi-diamètre parallèle; nous aurons $I_a = \frac{AM^2}{Om^2}$. Soit C l'extrémité du diamètre conjugué avec le plan OMA. Le volume V du parallélépipède construit sur le tétraèdre OMAC est encore appelé la *puissance* du point A; en le comparant à celui du parallélépipède construit sur les demi-diamètres conjugués OM, Om et OC, on trouve, comme ci-dessus, $I_a = \frac{V^2}{a^2b^2c^2}$.

De l'expression $I_x = -\frac{f(x)}{f(\beta)}$ et des différentes ma-

(*) Cet alinéa et le suivant renferment la solution de la question 837. Les développements que nous y donnons se rapportent principalement à l'ellipsoïde. Les deux hyperboloïdes exigent quelques légères modifications, à cause des diamètres imaginaires.

nières d'estimer l'indice, on peut tirer de nombreuses conséquences. Nous nous bornons à énoncer la suivante :

Quand trois surfaces du second ordre ont la même intersection deux à deux, les indices (ou plus généralement les caractéristiques) de tous les points de l'une d'elles par rapport aux deux autres ont une raison constante.

La proposition analogue sur les coniques avec de nombreux corollaires et les théorèmes corrélatifs font l'objet des Chapitres XVI et XVIII du *Traité des Sections coniques* de M. Chasles.

3. Soient $M_1 M_2 M_3 M_4$ un tétraèdre conjugué par rapport à f, V son volume, V_1, V_2,... les volumes des tétraèdres $OM_2M_3M_4$, $OM_3M_4M_1$,...(*), et I_r l'indice de M_r. Comme $I_r = -\frac{V}{V_r}$ et $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, on a

$$(3) \qquad \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} + \frac{1}{I_4} = -1,$$

ce qui donne une relation nécessaire entre les indices des quatre sommets d'un tétraèdre conjugué.

Soient N_1, N_2, N_3, N_4 les points réciproques de M_1,...; ces points sont les centres des sections de f par les faces du tétraèdre. En désignant par I'_r l'indice de N_r, nous aurons

$$I_r = -\frac{M_rN_r}{ON_r}, \quad I'_r = -\frac{N_rM_r}{OM_r};$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{1}{I_r} + \frac{1}{I'_r} = \frac{-ON_r + OM_r}{M_rN_r} = -1,$$

(*) V_r est positif ou négatif, suivant que O et M_r se trouvent du même côté ou de part et d'autre de la face opposée à M_r.

c'est-à-dire *la somme des inverses des indices de deux points réciproques est égale à* — 1.

Des relations (3) et (4), on conclut facilement

$$\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}=\frac{1}{I'_4},$$

$$\frac{1}{I'_1}+\frac{1}{I'_2}+\frac{1}{I'_3}+\frac{1}{I'_4}=-3,$$

égalités qui démontrent les théorèmes **920** et **921** de M. Faure.

Prenons pour la surface f une sphère S de rayon R, et soient p_r^2 la puissance (dans le sens de Steiner) de M_r, $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ les rayons des sections de S par les faces du tétraèdre; nous aurons $I_r=\frac{p_r^2}{R^2}$, $I'_r=-\frac{\rho_r^2}{R^2}$, et les égalités ci-dessus se transforment en

$$-\frac{1}{R^2}=\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_3^2}+\frac{1}{p_4^2},$$

$$-\frac{1}{\rho_4^2}=\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_3^2},$$

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_3^2}+\frac{1}{\rho_4^2}\right)\text{(*)},$$

théorèmes signalés sans démonstration par M. Lafitte (*Nouvelles Annales*, année 1857, p. 205). Le dernier pourrait s'énoncer ainsi : *Dans tout tétraèdre dont les hauteurs se coupent en un même point, l'inverse du*

(*) La première et la seconde de ces égalités expriment au fond la même propriété, l'une se rapportant à la sphère conjuguée et l'autre à la circonférence conjuguée. Si l'on ne veut conserver dans ces relations que des éléments réels, et que M_1 est celui des quatre sommets qui est intérieur à la sphère, on remplacera p_2, p_3, p_4 par les tangentes issues de M_2, M_3, M_4, $p_1\sqrt{-1}$ par le rayon de la section perpendiculaire à OM_1 en M_1 et $\rho_1\sqrt{-1}$ par la tangente issue de N_1.

carré du rayon de la sphère conjuguée est égal au tiers de la somme qu'on obtient en ajoutant les inverses des carrés des rayons des cercles conjugués avec les faces.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 806

(voir 2e série, t. VI, p. 188);

PAR M. ÉDOUARD WEYR,
Élève de l'École Polytechnique de Prague.

On donne cinq droites arbitraires; on prend un groupe de quatre de ces droites, et l'on construit le couple des deux droites qui les rencontrent. D'un point quelconque de l'espace, on mène la droite qui rencontre les deux droites de ce couple. On pourra ainsi mener de ce point cinq droites, puisqu'il y a autant de couples de deux droites qu'il est possible de former de groupes de quatre droites avec les cinq droites données. Démontrer que les cinq droites ainsi déterminées sont dans un même plan. (MANNHEIM.)

Soient 1, 2, 3, 4, 5 les cinq droites données; A_1, B_1 les deux droites qui rencontrent 2, 3, 4, 5; A_2, B_2 les deux droites qui rencontrent 3, 4, 5, 1, etc. D'un point quelconque P, menons les cinq droites D_1, D_2,... qui rencontrent respectivement les cinq couples A_1, B_1; A_2, B_2,.... Pour démontrer que ces cinq droites D_1, D_2,... sont dans un même plan, il suffit évidemment de prouver que trois quelconques d'entre elles, D_1, D_2, D_3 par exemple, sont dans un même plan.

Les quatre droites A_1, B_1, A_2, B_2, rencontrant les trois

droites 3, 4, 5, appartiennent à un même hyperboloïde à une nappe H_3. Les quatre droites A_2, B_2, A_3, B_3 appartiennent à un autre hyperboloïde H_1. Les quatre droites A_3, B_3, A_1, B_1 appartiennent à un troisième hyperboloïde H_2.

Cela étant, considérons les deux droites E, F qui rencontrent les quatre droites A_1, A_2, A_3, B_3. Rencontrant A_1, A_3, B_3, elles rencontrent aussi B_1. Rencontrant A_2, A_3, B_3, elles rencontrent aussi B_2. Donc ces deux droites, E, F, appartiennent aux trois hyperboloïdes H_1, H_2, H_3.

Par les deux droites D_1, D_2, faisons passer un plan qui coupe les trois hyperboloïdes suivant les trois coniques S_1, S_2, S_3. Soient e, f, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 les points où ce plan coupe les droites E, F, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

S_1 passe par les points e, f, a_2, b_2, a_3, b_3;
S_2 » e, f, a_3, b_3, a_1, b_1;
S_3 » e, f, a_1, b_1, a_2, b_2.

Les trois coniques ont donc deux points communs. Par suite, d'après un théorème connu, les trois cordes communes, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, se coupent en un même point. Donc la droite $a_3 b_3$ n'est autre que D_3, et l'on voit qu'elle est dans un même plan avec D_1, D_2.

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Figa Bartolomeo.

Question 807

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 188);

Par M. Édouard WEYR,
Élève de l'École Polytechnique de Prague.

Démontrer directement la propriété corrélative de la précédente. (Mannheim.)

Cette propriété corrélative peut s'énoncer ainsi : *Si*

l'on coupe les cinq couples A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3,... *par un plan arbitraire* P, *les droites* $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$,... *ou* D_1, D_2, D_3,... *concourent en un même point.*

Il suffit de prouver que les droites D_1, D_2, D_3,... passent par un même point.

Désignons encore par E, F les droites communes aux trois hyperboloïdes H_1, H_2, H_3. Appelons α_1 le plan des droites A_1, D_1; et, de même, β_1, α_2, β_2 les plans déterminés respectivement par les couples $B_1 D_1$, $A_2 D_2$, $B_2 D_2$. Soient α_3, β_3 les deux plans passant par le point de rencontre des droites D_1, D_2 et par les droites A_3, B_3. Soient ε, φ les plans passant par le même point et par les droites E, F. Désignons par S_1, S_2, S_3 les cônes circonscrits aux hyperboloïdes H_1, H_2, H_3, et dont le sommet est le point de rencontre des droites D_1, D_2. Comme tout plan passant par une génératrice d'un hyperboloïde est un plan tangent, on voit immédiatement que

S_1	touche les plans	ε, φ, α_2, β_2, α_3, β_3;
S_2	»	ε, φ, α_3, β_3, α_1, β_1;
S_3	»	ε, φ, α_1, β_1, α_2, β_2.

Donc les trois cônes S_1, S_2, S_3 ont deux plans tangents, ε, φ, qui leur sont communs. Donc les intersections des trois couples de plans α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 sont dans un même plan. Les deux premières intersections ne sont autres que les droites D_1, D_2; la troisième est la droite D_3; ces trois droites se coupent au même point. C. Q. F. D.

Question 887

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 240);

PAR M. ALBERT AUBANEL,
Élève au lycée de Nîmes.

Étant donnés deux cercles qui se coupent orthogonalement, si l'on fait passer un cercle par leurs centres

et par leurs points d'intersection, la somme des puissances d'un point de ce cercle par rapport aux cercles donnés est nulle. (H. Faure.)

Solution. — Puisque les deux cercles donnés se coupent orthogonalement, cela revient à dire que les rayons allant de chacun des centres à l'un des points d'intersection sont rectangulaires : donc

$$R^2 + R'^2 = OO'^2,$$

en appelant R et R′ les deux rayons, et OO′ la distance des centres.

Soit M un point tel, que la somme des puissances par rapport aux deux cercles soit nulle; on a donc pour ce point

$$d^2 - R^2 + d'^2 - R'^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad d^2 + d'^2 = R^2 + R'^2,$$

d et d' étant les distances du point M à chacun des centres.

On voit par là que le point M est sur la circonférence ayant OO′ pour diamètre; cette circonférence passe évidemment par les points d'intersection des deux circonférences données.

De plus, tous les points de cette circonférence OO′ jouissent de la propriété énoncée.

Généralisation. — Le problème proposé peut se généraliser de la manière suivante :

On donne deux cercles quelconques : trouver le lieu d'un point tel, que la somme des puissances de ce point par rapport aux deux cercles soit nulle.

Soit M un point du lieu; on a encore, en adoptant les notations précédentes,

$$d^2 + d'^2 = R^2 + R'^2.$$

Donc la somme des carrés des distances du point M aux deux centres est constante. D'après un théorème connu, donnant l'expression de la médiane d'un triangle en fonction des côtés, le lieu du point M est une circonférence ayant son centre au milieu de OO′ et dont le rayon m est fixé par la relation

$$m^2 = \frac{2(R^2 + R'^2) - \overline{OO'}^2}{4}.$$

On voit bien que, dans le cas particulier où les deux circonférences se coupent orthogonalement, on a

$$m = \frac{OO'}{2},$$

parce qu'alors

$$R^2 + R'^2 = \overline{OO'}^2.$$

On sait que la puissance d'un point situé à l'extérieur d'un cercle est positive; donc il ne peut y avoir aucun point satisfaisant à la condition, situé à l'extérieur de chacun des deux cercles.

Du reste, le rayon m doit être réel, donc la plus grande valeur de OO′ est

$$\overline{OO'}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

Si l'on donne à $\overline{OO'}^2$ la valeur limite $2(R^2 + R'^2)$, $m = 0$, le lieu se réduit à un point situé dans l'intérieur du plus grand des deux cercles.

Si les deux cercles donnés se coupent, les points d'intersection font partie du lieu; car tout point d'intersection a une puissance nulle par rapport à chacun des cercles. Le lieu est alors bien facile à construire : c'est la circonférence ayant son centre au milieu de OO′, et pour rayon la distance du milieu de OO′ à l'un des points d'intersection; on peut remarquer que cette circonférence n'a

aucun point en dehors des deux cercles donnés en même temps.

Si les deux cercles donnés sont tangents extérieurement, le lieu est situé tout entier à l'intérieur du plus grand des deux cercles et passe par le point de tangence; son rayon est $\frac{R - R'}{2}$.

Si les deux cercles donnés sont tangents intérieurement, le lieu est à l'intérieur du plus grand cercle, mais à l'extérieur du plus petit; son rayon est $\frac{R + R'}{2}$, il passe toujours par le point de tangence.

Il résulte encore de là que les deux cercles donnés et le lieu ont même axe radical.

Note. — Nous avons reçu une autre solution de M. A. Giard.

Question 890

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 336);

PAR M. PELLET,

Élève au lycée de Nîmes.

En désignant par X_n *le polynôme de Legendre, on propose de démontrer que l'équation de degré* $2n$, *savoir* :

$$n(n+1)X_n^2 - (1-x^2)X_n'^2 = 0,$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 *et* $+1$. (CH. HERMITE.)

$X_n = 0$ a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. Soient

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

ces n racines rangées suivant leur ordre de grandeur. Les racines de l'équation $X_n' = 0$ sont aussi réelles et

comprises entre les intervalles des racines précédentes. De sorte que, si on les désigne par $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, la suite

$$-1,\ a_1,\ b_1,\ a_2, \ldots,\ b_{n-1},\ a_n,\ 1$$

sera croissante.

-1 réduit le polynôme $n(n+1)X_n^2 - (1-x^2)X_n'^2$ à son premier terme, et par conséquent le rend positif, a_1 le réduit à

$$-(1-a_1^2)X_n'^2,$$

et par conséquent le rend négatif. Le polynôme a donc au moins une racine entre -1 et a_1.

On verrait de la même manière qu'il y a au moins une racine entre a_1 et b_1, b_1 et a_2, a_2 et $b_2, \ldots, b_{n-1}$ et a_n, a_n et 1.

Donc chacun des $2n$ intervalles de la suite

$$-1,\ a_1,\ b_1, \ldots,\ b_{n-1},\ a_n,\ 1$$

comprend au moins une racine de l'équation

$$n(n+1)X_n^2 - (1-x^2)X_n'^2 = 0.$$

Cette équation a donc toutes ses racines inégales, réelles et comprises entre -1 et $+1$. C. Q. F. D.

Note. — M. Brocard, lieutenant du Génie à Bar-le-Duc, nous a envoyé une autre solution de la question 890.

Question 917

(voir 2e série, t. VIII, p. 95);

PAR M. FOURET.

Trois points d'une droite décrivent chacun une surface déterminée; tout point M *de cette droite décrit en même temps une autre surface. Si pour une position déterminée de la droite on mène les normales aux sur-*

faces décrites par chaque point, toutes ces normales appartiennent à un hyperboloïde. (MANNHEIM.)

On sait que :

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite mobile se coupent suivant une même droite que l'on appelle la conjuguée de la première (*).

Ce théorème, qui est dû à M. Chasles, va nous permettre de démontrer très-facilement celui que nous avons en vue.

La droite dont il est question dans l'énoncé de ce dernier théorème peut se déplacer d'une infinité de manières, en satisfaisant aux conditions prescrites.

Imaginons qu'elle se déplace d'une quelconque de ces manières; chacun de ses points va décrire une courbe qui variera avec la nature du déplacement, et le lieu de cette courbe sera une certaine surface. Or les normales à ces différentes surfaces, aux points où elles sont rencontrées par la droite, sont situées dans les plans normaux aux trajectoires correspondantes. Toutes ces normales rencontrent donc la droite conjuguée, d'après le théorème que nous avons rappelé en commençant.

Pour un autre déplacement de la droite on aurait une droite conjuguée sur laquelle s'appuieraient encore les normales aux surfaces. Ces normales s'appuyant ainsi sur trois mêmes droites, à savoir : la droite donnée et deux groupes quelconques de ses conjuguées, forment les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe. C. Q. F. D.

On peut remarquer que le second système de génératrices de l'hyperboloïde est formé par la droite donnée et ses différentes conjuguées.

(*) BOUR, *Cinématique*, p. 152.

Question 940

(voir 2e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

Étant donnés n points sur un cercle, on peut trouver $3.4.5\ldots(n-1)$ *contours polygonaux formés de n côtés, ayant ces points pour sommets. Si, d'un même point du cercle on abaisse des perpendiculaires sur tous les côtés, le produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un contour quelconque est le même pour tous les contours.* (DÉSIRÉ ANDRÉ.)

1. Partant d'un quelconque des n sommets, on peut aller à tous les autres, et revenir au point de départ par autant de chemins que l'on peut former de permutations de $n-1$ lettres, c'est-à-dire

$$1.2.3.4\ldots(n-1);$$

mais comme ces chemins donnent deux à deux le même contour parcouru en sens inverse, le nombre des contours distincts est égal à

$$3.4.5\ldots(n-1).$$

2. Soit M le point donné. D'après un théorème connu de Géométrie élémentaire, la perpendiculaire abaissée du point M sur un côté quelconque est égale au produit des distances du point M aux deux extrémités de ce côté, divisé par le diamètre du cercle circonscrit. Si donc on nomme P_n le produit des distances du point M aux n sommets donnés, et R le rayon du cercle, le produit des n

perpendiculaires sera égal à

$$\frac{P_n^2}{(2R)^n},$$

quel que soit le contour considéré.

Note. — M. O. Callandreau, élève du lycée d'Angoulême, nous a envoyé une bonne solution de la question précédente.

CORRESPONDANCE.

Monsieur le rédacteur,

En vous priant d'insérer la présente dans le prochain numéro de votre journal, je n'ai point l'intention de contester à M. Faure le droit de priorité au sujet de plusieurs de ses théorèmes; mon seul but est d'empêcher les conclusions malveillantes que l'on pourrait tirer de la lettre qui a paru dans votre numéro de mai.

J'étais parvenu, dès l'année 1864, par des méthodes différentes de celles de M. Faure, à un assez grand nombre de propriétés des coniques qui étaient inédites à cette époque et que certaines circonstances m'ont empêché de livrer immédiatement à la publicité. L'article sur les *Triangles et coniques combinés,* est extrait de ces recherches, et vous a été envoyé en janvier 1867, avant que j'aie pu avoir connaissance du *Recueil de théorèmes* et de la *Note sur les coniques conjuguées à un triangle,* qui figure dans les *Nouvelles Annales,* année 1867, p. 432; un autre travail, qui renferme, sous une forme peu différente, les équations particulières rapportées dans sa lettre, date de 1866 (voir *Nouvelles Annales,* année 1868, p. 221). Dans ces articles, ainsi que dans d'autres qui ont paru dans votre journal et dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique,* je n'ai

jamais négligé de citer les auteurs de propositions déjà connues ; mais j'étais également fondé à considérer d'autres théorèmes que je démontrais comme nouveaux et inédits.

Agréez, Monsieur le rédacteur, l'assurance de ma considération distinguée.

NEUBERG.

EXERCICES (*).

Quelques propriétés de la droite de Simson.

1. Étant donnés quatre points A, B, C, D sur un cercle, du point A on abaisse sur les côtés du triangle BCD des perpendiculaires. Les pieds de ces perpendiculaires sont sur une même droite, que nous désignerons par α. Construisons de même les trois autres droites β, γ, δ, les quatre droites α, β, γ, δ concourent en un même point E. Le point E est le point commun aux quatre cercles des neuf points relatifs aux quatre triangles formés par les points A, B, C, D, pris trois à trois.

2. Si, aux points de rencontre de la droite α avec deux hauteurs Bb, Cc du triangle BCD, on élève des perpendiculaires respectives à ces hauteurs, ces deux droites se coupent au point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

3. La droite α rencontre le cercle des neuf points du triangle BCD en un second point K ; si au point K nous élevons à la droite α la perpendiculaire KL, cette droite KL est la droite de Simson α' relative au point A', diamétralement opposé à A.

(*) Sous ce nom, nous proposerons aux lecteurs des *Nouvelles Annales* des questions dont nous n'insérerons pas les solutions.

4. Cette droite α' rencontre le cercle des neuf points du triangle BCD en un second point L; ce point L est le point de rencontre des parallèles menées par les milieux des côtés du triangle BCD aux droites AB, AC, AD.

5. *Corollaire.* — Si l'on considère une série de triangles circonscrits à une ellipse et inscrits dans le cercle directeur relatif au foyer F, et si l'on construit pour chacun de ces triangles la droite α relative à un point *fixe* A du cercle directeur, cette droite α pivote autour d'un point fixe situé sur le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. (ANNÉE 1870.)

Composition de Mathématiques.

Par l'axe transverse d'une hyperbole donnée on mène un plan P faisant un angle α avec le plan de la courbe, puis dans le plan P une droite OZ perpendiculaire à cet axe transverse; trouver l'équation de la surface de révolution décrite par la rotation de l'hyperbole autour de OZ.

Construire la section méridienne de la surface, en supposant l'hyperbole équilatère, la droite OZ menée par l'un des sommets de la courbe et l'angle α égal à $\frac{\pi}{4}$.

Composition de Physique.

I.

La balance de Coulomb et son application à la mesure des petites forces.

II.

1° Dans une balance de Coulomb sans micromètre, les deux boules étant d'abord en contact et le fil sans torsion, on électrise la boule fixe, et la boule mobile est repoussée à 60 degrés. Établir l'équation d'équilibre.

2° Supposons que, dans l'expérience précédente, la ligne 0 — 180, ou la direction de l'aiguille à l'état neutre, soit perpendiculaire au méridien magnétique. Si on enlève la boule fixe et si on remplace l'aiguille mobile par un petit barreau aimanté de même poids, ce barreau ne restera pas à zéro, il s'arrêtera par exemple à 30 degrés. Établir la nouvelle équation d'équilibre.

3° Montons l'aiguille et le barreau parallèlement sur une même chape, que nous placerons sur un pivot au centre de la cage de la balance (dont le fil sera enlevé). Le barreau dirigera l'aiguille et la maintiendra dans le méridien magnétique. Supposons que le zéro de la division soit aussi amené dans ce plan, et que l'on y replace la boule fixe de la première expérience. Si on l'électrise, la boule portée par l'aiguille s'électrisera par contact et sera repoussée. On demande quelle sera la déviation, si la charge communiquée à la boule fixe est la même que dans la première expérience.

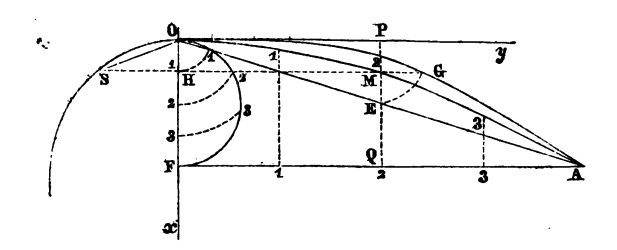
4° On cherchera encore ce que deviendrait cette déviation si, pendant que les boules sont écartées, on enlevait à la boule fixe la moitié de son électricité.

Nota. Les candidats s'attacheront surtout à donner une solution nette et concise de ces quatre problèmes. Ils remarqueront que les angles sont trop grands pour qu'on puisse se passer du calcul trigonométrique.

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE;

PAR M. ÉMILE LECLERT.

Soient OMA *une parabole rapportée à son axe* Ox *et à son sommet* O; OS *un cercle tangent à la parabole en* O *et ayant son centre sur* Ox. *Si l'on projette sur le*



cercle, en S, *perpendiculairement à* Ox, *un point* M *quelconque de la parabole, la distance* MH *du point* M *à l'axe et la corde* OS *sont dans un rapport constant.*

En effet, si a désigne le double du paramètre de la parabole et d le diamètre du cercle, on a

$$\overline{\mathrm{MH}}^2 = a \times \mathrm{OH},$$

$$\overline{\mathrm{OS}}^2 = d \times \mathrm{OH};$$

'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{OS}} = \sqrt{\frac{a}{d}},$$

pport constant, quel que soit le point M.

Réciproquement, *étant donnés un cercle* OS *et l'un de ses diamètres* Ox, *si l'on projette un point* S *du cercle, en* M, *sur une droite* PQ *menée parallèlement à* Ox *à une distance* MH *quelconque, et si l'on déplace le point* S *de la droite* PQ *de telle sorte que le rapport de la corde* OS *à la distance* MH *demeure constant, le lieu des points* M *est une parabole.*

En effet, k désignant une constante, posons

$$\frac{\text{MH}}{\text{OS}} = k.$$

Par rapport au système d'axes rectangulaires Ox, Oy, les points S et M ont même abscisse $\text{OH} = x$. Or, dans le cercle, d désignant son diamètre, on a

$$\overline{\text{OS}}^2 = xd;$$

donc, pour tout point M du lieu, en appelant y son ordonnée MH, on aura

$$y^2 = k^2 dx,$$

équation d'une parabole.

L'intérêt de ces propositions réside dans les corollaires qu'elles fournissent. La propriété et la construction suivantes sont particulièrement dignes d'attention; il est d'ailleurs facile de les justifier séparément en particularisant à leur sujet les raisonnements qui précèdent.

1. *Soient* OGA *un arc de cercle,* OA *sa corde,* Ox *le diamètre mené par son extrémité* O. *Si, parallèlement à* Ox, *on mène une droite quelconque* PQ *qui coupe la corde en* E, *et si l'on projette, en* M, *sur* PQ, *un point* G *du cercle tel, que sa distance au point* O *soit égale à* OE: *le lieu des points* M *est la parabole qui, ayant son sommet en* O *et* Ox *pour axe, coupe l'arc de cercle en* A.

Ainsi est mise en évidence, pour la première fois, croyons-nous, une corrélation intéressante entre deux courbes qu'il est souvent utile de rapprocher l'une de l'autre.

2. *Construire une parabole, connaissant son sommet* O, *son axe* Ox *et un point* A. — Soit F le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Ox. Je partage les longueurs AF, OF en un même nombre de parties égales par les points marqués 1, 2, 3; avec OF comme diamètre, je décris une demi-circonférence sur laquelle je rabats, de O comme centre, les divisions de OF; les distances à AF des points 1, 2, 3, ainsi obtenus sur la circonférence, sont respectivement celles des points 1, 2, 3 de la parabole demandée, et il suffira de les relever, puis de les porter normalement à AF.

Par sa simplicité, cette construction se prêterait souvent, dans les arts, à des tracés de grandeur d'exécution, par exemple au tracé des poutres arquées (*barrots*) qui servent à la construction des ponts de navire.

NOTE SUR LE TRIANGLE CIRCONSCRIT A UNE CONIQUE;

Par M. CARNOY,
de Louvain.

« Un triangle étant circonscrit à une conique, les lignes qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent en un point O; de plus, ces côtés sont rencontrés par ceux du triangle inscrit correspondant en trois points situés sur une certaine droite L. Si l'on considère deux côtés de ce triangle comme deux tangentes fixes, et le troisième côté comme une tangente variable, le point O et la droite L vont se déplacer dans le plan. »

Je me propose d'indiquer un moyen facile d'arriver à l'équation de la courbe des points O et de l'enveloppe de la droite L.

Soient $T_1 = o$, $T_2 = o$ et $C = o$ les équations des deux côtés ou tangentes fixes et de leur corde de contact; l'équation de la conique peut s'écrire

$$T_1 T_2 + kC^2 = o;$$

μ étant un paramètre variable, l'équation

$$\mu T_1 + C = o$$

représente une droite qui passe par le point $(T_1 C)$ et un certain point de la courbe que nous appelons μ. L'élimination de T_1 entre les équations précédentes donnera

$$T_2 - \mu k C = o.$$

Cette équation est celle d'une nouvelle droite qui joint le point $(T_2 C)$ au même point μ de la courbe.

L'équation de la corde passant par les points μ et μ' sera de la forme

$$T_2 - k(\mu + \mu')C - k\mu\mu' T_1 = o,$$

car elle est satisfaite dans la double hypothèse :

$$\mu T_1 = - C, \quad T_2 = \mu k C$$

et

$$\mu' T_1 = - C, \quad T_2 = \mu' k C.$$

Si nous faisons ensuite $\mu = \mu'$, les deux points se confondent, et la tangente au point μ aura pour équation

$$(T_3) \qquad T_2 - 2k\mu C - k\mu^2 T_1 = o.$$

Cette tangente (T_3) sera le troisième côté variable du triangle circonscrit, dont les deux autres côtés sont T_1 et T_2.

Pour le point d'intersection de T_1 avec T_3, on a

$$(\alpha) \qquad T_2 - 2\mu k C = o.$$

'est l'équation d'une droite qui passe par les points $(T_1 T_3)$ et $(T_2 C)$.

De même l'équation

$$\mu T_1 + 2C = 0, \tag{β}$$

btenue en faisant $T_2 = 0$, dans l'équation (T_3), sera elle d'une ligne qui joint $(T_1 C)$ avec $(T_2 T_3)$.

Les deux lignes (α) et (β) passent par le point O. L'élimination du paramètre μ nous donnera, pour l'équation u lieu géométrique des points O,

$$T_1 T_2 + 4k C^2 = 0.$$

'est l'équation d'une conique ayant un double contact vec la conique donnée suivant la ligne C.

Cherchons en second lieu l'équation de l'enveloppe e la droite L.

Reprenons les deux équations

$$\mu T_1 + C = 0 \quad \text{et} \quad T_2 - \mu k C = 0.$$

es deux droites, que nous appellerons C_1 et C_2, forment vec C le triangle inscrit correspondant; elles couperont s deux tangentes T_1 et T_2 en deux points A et B.

La ligne L passe par l'intersection A de C_1 avec T_2, n équation sera de la forme

$$m T_2 + \mu T_1 + C = 0.$$

Il faut déterminer le paramètre m par la condition i'elle passe par le point B. On trouvera ainsi $m = -\frac{1}{\mu k}$. 'équation de la ligne L sera donc

$$- T_2 + \mu^2 k T_1 + \mu k C = 0.$$

le renferme un paramètre variable avec la tangente obile; il reste à éliminer μ entre cette équation et sa

dérivée par rapport à μ, égalée à zéro. Le résultat final sera

$$4T_1T_2 + kC^2 = 0.$$

L'enveloppe de la droite L est aussi une section conique, ayant un double contact avec la première suivant la même ligne C.

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LAGUERRE.

I.

Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux polynômes du troisième degré par rapport à la variable x; y désignant une quantité arbitraire, considérons l'équation

$$(1) \qquad F(x) + yf(x) = 0.$$

Soit V le discriminant de cette équation; V est, comme on le voit facilement, une fonction entière et du quatrième degré de y. En regardant y comme inconnue, l'équation

$$(2) \qquad V = 0$$

a quatre racines; désignons par a, b, c trois quelconques de ces racines.

Si, dans l'équation (1), on donne à y la valeur a, l'équation résultante a deux racines égales; soient λ la valeur commune à ces deux racines, et α la valeur de la troisième racine.

Pour abréger, représentons aussi par

$$-g(y)$$

le coefficient de x^3 dans le premier membre de l'équation (1).

a identiquement

$$-F(x)-af(x)=g(a)(x-\lambda)^2(x-\alpha),$$

$$\frac{1}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-F(x)-af(x)}{x-\alpha}}=x-\lambda;$$

ignant respectivement par μ, ν et β, γ les quantités
ues à λ et à α et relatives aux deux racines b
: l'équation (2), on a de même

$$\frac{1}{\sqrt{g(b)}}\sqrt{\frac{-F(x)-bf(x)}{x-\beta}}=x-\mu,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-F(x)-cf(x)}{x-\gamma}}=x-\nu.$$

olions la première des trois relations précédentes
$-\nu$), la deuxième par $(\nu-\lambda)$, la troisième par
:) et additionnons, membre à membre, les équa-
ainsi obtenues, il vient

$$\sqrt{\frac{-F(x)-af(x)}{x-\alpha}}+\frac{\nu-\lambda}{\sqrt{g(b)}}\sqrt{\frac{-F(x)-bf(x)}{x-\beta}}+\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-F(x)-cf(x)}{x-\gamma}}=0.$$

relation est une identité qui doit être vérifiée,
que soit x.

peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\nu}{)}\sqrt{\frac{-\frac{F(x)}{f(x)}-a}{x-\alpha}}+\frac{\nu-\lambda}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\frac{F(x)}{f(x)}-b}{x-\beta}}+\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-\frac{F(x)}{f(x)}-c}{x-\gamma}}=0.$$

Si maintenant on suppose que x ne désigne plus une quantité arbitraire, mais une racine de l'équation (1), on a

$$y = -\frac{F(x)}{f(x)};$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mu - \nu}{\sqrt{g(a)}} = A, \quad \frac{\nu - \lambda}{\sqrt{g(b)}} = B, \quad \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{g(c)}} = C,$$

on a la relation suivante :

$$(3) \qquad A\sqrt{\frac{y-a}{x-\alpha}} + B\sqrt{\frac{y-b}{x-\beta}} + C\sqrt{\frac{y-c}{x-\gamma}} = 0.$$

Voilà ainsi une forme irrationnelle que l'on peut donner à l'équation (1); d'après ce qui précède, cette transformation peut être faite de quatre façons différentes, puisque l'on peut employer, pour l'effectuer, trois quelconques des racines de l'équation

$$V = 0.$$

II.

Si l'on considère y et x comme les coordonnées rectangulaires d'un point mobile du plan, on peut dire que l'équation (3) est une forme particulière de l'équation de la courbe du quatrième ordre représentée par l'équation (1).

Pour parler plus exactement, les points de cette courbe satisfont à l'équation (3); mais cette dernière est plus générale.

En effet, si l'on fait disparaître de cette équation les irrationnalités, en effectuant le produit des différentes valeurs que prend son premier membre, quand on donne

ux radicaux les divers signes dont ils sont susceptibles, n obtient une équation

$$U = 0,$$

ans laquelle U est un polynôme entier du quatrième egré en x et du deuxième degré en y.

Il résulte de ce qui précède que U doit être exactement divisible par

$$F(x) + yf(x).$$

est donc égal au produit de ce polynôme par un facteur qui est nécesairement du second degré en x et en y, t du premier degré par rapport à chacune de ces variables.

Géométriquement, ce second facteur, égalé à zéro, reprèsente une hyperbole équilatère.

On voit ainsi que l'équation (3) représente à la fois courbe représentée par l'équation (1) et une hyperbole quilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes.

Ces deux courbes jouissent toutes les deux de la propriété géométrique exprimée par l'équation (3), propriété très-simple que je me dispenserai de transcrire ici.

III.

On peut se demander, *à priori*, étant donnée l'équaon (3), de déterminer quelle relation il doit exister entre s coefficients de cette équation, pour que la courbe l'elle représente se décompose en une hyperbole équitère ayant ses asymptotes parallèles aux axes et une itre courbe, qui est alors nécessairement représentée ır une équation de même forme que l'équation (1).

Si cette décomposition a lieu effectivement, on doit ouvoir satisfaire à l'équation (3) par une valeur de x

NOTE SUR LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES NORMALES A UNE CONIQUE;

PAR M. PAINVIN,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

1. THÉORÈME I. — *Si d'un sommet* A_1 *d'une conique* Σ *on abaisse des perpendiculaires sur les quatre normales menées à la courbe d'un même point* P, *les quatre points* M_1, M_2, M_3, M_4, *où ces perpendiculaires rencontrent la courbe, sont sur une même circonférence* Ω.

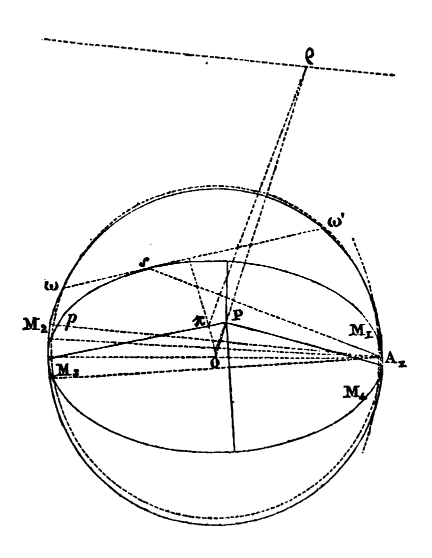
THÉORÈME II. — *Si du sommet* A_1 *on abaisse, sur le diamètre passant par* P, *une perpendiculaire qui rencontre la conique en* s, *la tangente en* s *sera l'axe radical du cercle précédent et du cercle décrit sur l'axe qui passe par* A_1.

THÉORÈME III. — *Par le sommet* A_1 *on mène une parallèle à la polaire du point* P *relative à* Σ; *soit* p *l'intersection de cette parallèle avec* Σ; *soit* π *le centre du cercle passant par* p *et par les points* ω, ω', *où la tangente en* s *rencontre le cercle décrit sur l'axe qui passe par* A_1; *soit* ρ *l'intersection du diamètre passant par* P *avec la polaire du point* P. *Le centre du cercle* Ω *sera sur la droite menée par le point* P *parallèlement à* $\pi\rho$.

Les deux premiers théorèmes sont dus à Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 172; t. XLVIII, p. 337); le troisième théorème est extrait du remarquable Mémoire de M. Smith sur *quelques problèmes cubiques et quadratiques* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. III, p. 145).

Ces trois propositions donnent évidemment la solution

de la question énoncée; car on peut construire le cercle Ω qui passe par les points ω et ω' (théorème II), et dont le centre se trouve sur la droite menée par P parallèlement à $\pi\rho$ (théorème III); ce cercle coupera la conique Σ en



quatre points M_1, M_2, M_3, M_4; les normales cherchées seront les perpendiculaires abaissées du point P sur les quatre droites A_1M_1, A_1M_2, A_1M_3, A_1M_4 (théorème I).

Je donnerai la démonstration analytique suivante des propositions qui précèdent.

2. Soient α, β les coordonnées du point P, φ le paramètre angulaire du pied d'une des normales menées du point P à la conique

$$(1)\quad (\Sigma)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

l'équation de cette normale sera

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0,$$

et l'on aura la condition

$$(2) \qquad \frac{a\alpha}{\cos\varphi} - \frac{b\beta}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire menée du point A_1 à cette normale sera

$$(3) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\operatorname{tang}\varphi - 1 = 0;$$

si l'on élimine tangφ entre les équations (2) et (3), on trouve

$$\left[a\alpha\left(1-\frac{x}{a}\right) - b\beta\frac{y}{b}\right]\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2}} = c^2\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b},$$

ou, en élevant au carré,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[a^2\alpha^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 - 2ab\alpha\beta\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} + b^2\beta^2\frac{y^2}{b^2}\right] \\ &\qquad \times \left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2}\right] \\ &= c^4\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\frac{y^2}{b^2}. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière équation représente les quatre droites menées du point A_1 perpendiculairement aux quatre normales issues du point P; les équations (1) et (4), considérées simultanément, détermineront les intersections de ces quatre droites avec la conique Σ.

Or remplaçons $\frac{y^2}{b^2}$ par $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, et supprimons le fac-

ɛur $\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$, on aura l'équation suivante :

$$\left[a^2\alpha^2\left(1-\frac{x}{a}\right)-2ab\alpha\beta\frac{y}{b}+b^2\beta^2\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]$$
$$\times\left(1+\frac{x}{a}+1-\frac{x}{a}\right)=c^4\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

ɩquelle représente une courbe passant par les quatre oints M_1, M_2, M_3, M_4; cette équation est, en définitive,

$$(5)\quad \begin{cases} c^4\dfrac{x^2}{a^2}-2(a^2\alpha^2-b^2\beta^2)\dfrac{x}{a}-4ab\alpha\beta\dfrac{y}{b} \\ \qquad +2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)-c^4=0. \end{cases}$$

.'équation des coniques passant par les quatre points ommuns aux courbes (1) et (5) étant

$$\left(\frac{c^4}{a^2}+\frac{\lambda}{a^2}\right)x^2+\lambda\frac{y^2}{b^2}-2(a^2\alpha^2-b^2\beta^2)\frac{x}{a}-4ab\alpha\beta\frac{y}{b}$$
$$+2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)-c^4-\lambda=0,$$

ɱn aura un cercle si l'on prend $\lambda=b^2c^2$.

Le premier théorème est donc démontré, et l'équation lu cercle Ω est

$$(\mathrm{I})\quad (\Omega)\quad \begin{cases} x^2+y^2-2\dfrac{a^2\alpha^2-b^2\beta^2}{c^2}\dfrac{x}{a}-4\dfrac{ab\alpha\beta}{c^2}\dfrac{y}{b} \\ \qquad +2\dfrac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}{c^2}-a^2=0; \end{cases}$$

les coordonnées de son centre sont

$$(\mathrm{II})\quad (\mathrm{C})\quad \begin{cases} x_0=\dfrac{a^2\alpha^2-b^2\beta^2}{c^2a}, \\ y_0=\dfrac{2a\alpha\beta}{c^2}; \end{cases}$$

t enfin l'axe radical du cercle Ω et du cercle décrit sur

$A_1 A_2$ est visiblement

$$\text{(III)} \quad (\omega\omega') \quad (a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\frac{x}{a} + 2ab\,\alpha\beta\,\frac{y}{b} - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) = 0.$$

3. Les coordonnées des points s, ρ et p définis dans l'énoncé sont

$$(6) \quad (s) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{a(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}, \\ y_1 &= \frac{2ab^2\alpha\beta}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}; \end{aligned} \right.$$

$$(7) \quad (\rho) \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \\ y_2 &= \frac{a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}; \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad (p) \quad \left\{ \begin{aligned} x_3 &= a\,\frac{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \\ y_3 &= \frac{2ab^2\alpha\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}. \end{aligned} \right.$$

Le calcul de ces coordonnées est très-simple et ne présente aucune difficulté. On voit immédiatement que la tangente à la conique Σ au point $s(x_1, y_1)$ est l'axe radical (III); la seconde proposition est donc démontrée.

4. L'équation d'un cercle passant par les points ω, ω' est

$$(9) \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 - a^2 \\ & \quad + \mu\left[(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\frac{x}{a} + 2ab\,\alpha\beta\,\frac{y}{b} - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)\right] = 0; \end{aligned} \right.$$

si l'on exprime que ce cercle passe par le point $p(x_3, y_3)$, on trouve

$$\mu = -\frac{2a^2b^2}{c^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)};$$

les coordonnées x', y' du centre du cercle $\omega\omega' p$ seront alors

$$(10) \quad (\pi) \quad x' = \frac{ab^2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)}{c^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}, \quad y' = \frac{2a^3b^2\alpha\beta}{c^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}.$$

5. Il est maintenant facile d'écrire les équations des deux droites qui, d'après l'énoncé, doivent déterminer le centre du cercle Ω. La droite menée perpendiculairement à $\omega\omega'$, et en son milieu, doit passer par le centre du cercle décrit sur $A_1 A_2$ et par le centre π du cercle $\omega\omega' p$; son équation est donc

$$(11) \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'};$$

la droite menée par le point P parallèlement à $p\pi$ est

$$(12) \qquad \frac{x - \alpha}{x_2 - x'} = \frac{y - \beta}{y_2 - y'}.$$

Or des valeurs (II), (7) et (10), il résulte évidemment

$$(13) \quad \frac{x'}{x_0} = \frac{y'}{y_0} = k, \quad \frac{x_2}{\alpha} = \frac{y_2}{\beta} = k, \quad \text{où} \quad k = \frac{a^2b^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Eu égard à ces dernières relations, les équations (11) et (12) deviennent

$$(14) \qquad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x - \alpha}{x_0 - \alpha} = \frac{y - \beta}{y_0 - \beta};$$

il est bien visible que ces deux droites se coupent au point (x_0, y_0), centre du cercle Ω; ce qui démontre le troisième théorème.

MÉMOIRE SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES RÉSIDUS NUMÉRIQUES

(suite et fin, voir 2ᵉ série, t. IX, p. 221, 271 et 302);

PAR MM. A. LAISANT ET ÉTIENNE BEAUJEUX.

21. Si l'on suppose que le nombre des restes composant la période soit *pair* et égal à $2n$, on voit qu'en conservant les notations employées précédemment on aura

$$Aq^{2n} = m.D + A,$$

d'où

$$q^{2n} - 1 = m.D.$$

Par conséquent, si D est premier, $q^n - 1 = m.D$, ou $q^n + 1 = m.D$. Mais cette dernière égalité peut seule exister, car de la première résulterait que la période ne serait que de n termes. Donc aussi

$$q^{n+p} + q^p = m.D,$$

$$Aq^{n+p} + Aq^p = m.D,$$

et

$$r_{n+p} + r_p = m.D.$$

Or r_{n+p} et r_p étant plus petits que D, on ne peut avoir que

$$r_{n+p} + r_p = D.$$

Ainsi, *la somme des restes de même rang dans chaque demi-période est égale au diviseur*, *lorsque ce diviseur est un nombre premier.*

22. Dans cette même hypothèse d'un nombre pair $2n$ de termes à la période, on aura encore les propriétés suivantes :

1° *La somme des restes affectés d'indices impairs st un multiple du diviseur, et, par suite, il en est de même de la somme des restes d'indices pairs.*

En effet, $r_1 + r_3 + \ldots + r_{2n-1}$ peut être remplacé, à n multiple près de D, par

$$Aq + Aq^3 + \ldots + Aq^{2n-1} = Aq\left(\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}\right);$$

onc, etc.

2° *Les termes de la suite q, $q^2, \ldots$, divisés par* D, *ombre premier, donnant lieu aux restes $r_1, r_2, r_3, \ldots$, t $2n$ étant le nombre des termes de la période, on ura $r_k^n = m.\mathrm{D} \pm 1$, suivant que k est pair ou impair.*

Car (12) $r_k^n = r_n^k$, à un multiple près de D, et $r_n = \mathrm{D} - 1$; donc, etc.

3° *n étant impair, on aura $r_p^k \pm r_{n+k}^{n+p} = m.\mathrm{D}$, suivant que k et p sont de même parité ou de parités contraires.*

En effet (12), on a, à des multiples de D près,

$$r_{n+k} = r_n \times r_k,$$

d'où

$$\begin{aligned} r_{n+k}^{n+p} &= r_n^{n+p} \times r_k^{n+p} \\ &= r_n^n \times r_n^p \times r_k^n \times r_k^p \\ &= r_n^n \times r_n^p \times r_n^k \times r_k^p \\ &= r_n^{n+p+k} \times r_k^p; \end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned} r_k^p + r_{k+n}^{p+n} &= r_k^p\left(1 + r_n^{n+p+k}\right), \\ r_k^p - r_{k+n}^{p+n} &= r_k^p\left(1 - r_n^{n+p+k}\right); \end{aligned}$$

donc, etc.

4° *n étant pair, on aura $r_k^p \pm r_{n+k}^{n+p} = m.\mathrm{D}$, suivant que k et p sont de parités contraires ou de même parité.*

On le verrait d'une façon analogue.

5° *n étant impair, si l'on écrit 2n restes consécutifs quelconques, le premier étant d'indice impair, qu'on élève celui-ci à la puissance 1, le second à la puissance 2, et ainsi de suite, la somme sera un multiple du diviseur.*

6° *Si n est pair, la même propriété aura lieu, mais en commençant par un reste d'indice pair.*

Ces deux dernières remarques sont des corollaires immédiats des deux précédents.

7° *La somme ou la différence des puissances pareilles de deux restes distants de n rang est un multiple du diviseur, selon que l'exposant de la puissance est impair ou pair.*

Cela résulte immédiatement de ce que $r_{n+k} = D - r_k$.

8° *Soit n pair et égal à* $2n'$; *si l'on fait les deux produits* $r_k \times r_{k+1}$ *et* $r_{k+n'} \times r_{k+n'+1}$, *leur somme sera un multiple du diviseur.*

Car ces deux produits peuvent être remplacés par q^{2k+1} et $q^{2k+2n'+1}$, dont la somme est

$$q^{2k+1}(q^n + 1) = m.D.$$

9° *Si l'on écrit les* $2n$ *restes sur deux lignes horizontales*

$$\begin{array}{lll} r_1, & r_2, \ldots, & r_n, \\ r_{n+1}, & r_{n+2}, \ldots, & r_{2n}, \end{array}$$

la somme des produits indiqués est un multiple du diviseur.

En effet,

$$r_{n+k} = D - r_k;$$

donc

$$r_{n+k} \times r_k = m.D - r_k^2;$$

d'où résulte que, pour la somme, on aura

$$m.D - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2).$$

En remplaçant r_1 par q, r_2 par $q^2, \ldots$, tout se réduit à examiner l'expression

$$q^2 + q^4 + \ldots + q^{2n},$$

ou la suivante

$$1 + q^2 + \ldots + q^{2n-2} = \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = m.D.$$

Donc, etc.

10° *n étant pair et égal à $2n'$, écrivons comme ci-dessous les $4n$ restes :*

$$(A) \quad \begin{cases} r_1 & r_2, \ldots, & r_{n'}, \\ r_{n'+1}, & r_{n'+2}, \ldots, & r_{2n'}, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} r_{2n'+1}, & r_{2n'+2}, \ldots, & r_{3n'}, \\ r_{3n'+1}, & r_{3n'+2}, \ldots, & r_{4n'}. \end{cases}$$

Si l'on fait les produits indiqués en (A) *et* (B) *et leurs sommes respectives* P *et* L, *on aura*

$$P - L = m.D;$$

car $r_k \times r_{n'+k}$ et $r_{2n'+k} \times r_{3n'+k}$ peuvent être remplacés respectivement par $q^{2k+n'}$ et par $q^{2k+5n'}$ ou par $r_{2k+n'}$ et $r_{2k+5n'}$, et, de plus, $r_{2k+n'} = r_{2k+5n'}$; donc, etc.

11° *Soit toujours $n = 4n'$, et posons*

$$r_1 + \ldots + r_{n'} = S_1,$$
$$r_{n'+1} + \ldots + r_{2n'} = S_2,$$
$$r_{2n'+1} + \ldots + r_{3n'} = S_3,$$
$$r_{3n'+1} + \ldots + r_{4n'} = S_4;$$

on aura

$$S_1 S_3 + S_2 S_4 = m.D,$$
$$S_1 S_4 - S_2 S_3 = m.D,$$
$$S_1 S_2 - S_3 S_4 = m.D.$$

On le voit sans peine en remplaçant S_1, S_2, S_3, S_4 par

$$q\left(\frac{q^{n'}-1}{q-1}\right),\ q^{n'+1}\left(\frac{q^{n'}-1}{q-1}\right),\ q^{2n'+1}\left(\frac{q^{n'}-1}{q-1}\right),\ q^{3n'+1}\left(\frac{q^{n'}-1}{q-1}\right)$$

respectivement.

12° *Supposons toujours $n = 4n'$, posons*

$$\begin{aligned} r_1 + r_3 + \ldots + r_{2n'-1} &= \Sigma_1, \\ r_2 + r_4 + \ldots + r_{2n'} &= \Sigma_2, \\ r_{2n'+1} + r_{2n'+3} + \ldots + r_{4n'-1} &= \Sigma_3, \\ r_{2n'+2} + r_{2n'+4} + \ldots + r_{4n'} &= \Sigma_4; \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} \Sigma_1\Sigma_2 - \Sigma_3\Sigma_4 &= m.\mathrm{D}, \\ \Sigma_1\Sigma_4 - \Sigma_2\Sigma_3 &= m.\mathrm{D}. \end{aligned}$$

On s'en assurerait comme précédemment.

Nota. On verrait aisément que plusieurs des propriétés de ce numéro s'étendent aux restes dus à la progression géométrique $\mathrm{A}q$, $\mathrm{A}q^2, \ldots,$ où A est différent de 1.

23. Pour terminer, nous proposerons au lecteur, à titre d'exercices, les questions suivantes :

1° En divisant les nombres q, $q^2, \ldots$ par un diviseur D qui s'écrive ab dans le système de numération de base q, démontrer que

$$\begin{aligned} a^2 r_2 - b^2 r_0 &= m.\mathrm{D}, \\ a^3 r_3 + b^3 r_0 &= m.\mathrm{D}, \\ a^4 r_4 - b^4 r_0 &= m.\mathrm{D}, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, r_0 étant un reste quelconque.

2° D, nombre premier, s'écrivant encore ab dans le système de base q, donne lieu, appliqué comme diviseur à la suite $\mathrm{A}q$, $\mathrm{A}q^2, \ldots,$ à une période de $2n$ restes

$r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$. Démontrer que

$$ar_k - br_{k+n-1} = m.D$$

et

$$ar_{k+n+1} - br_k = m.D.$$

3° En divisant $q, q^2, \ldots$ par le nombre premier, $D = \frac{q+B}{N}$, qui s'écrit ab dans le système B, on trouve une période de $2n$ restes $r_1, \ldots, r_{2n}$. Démontrer que

$$ar_k + br_{k+n-1} = D$$

et

$$ar_{k+n+1} + br_k = m.D.$$

Si, au contraire, $D = \frac{q-B}{N}$, on aura

$$ar_k - br_{k+n-1} = D$$

et

$$ar_{k+n+1} - br_k = m.D.$$

4° Soit $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ $(r_n = 1)$ la période obtenue en divisant $q, q^2, \ldots$ par D; faire voir que si l'on prend $Q = m.D + r_{n-1}$, on trouvera, en partant de $Q, Q^2, \ldots$ la période précédente renversée, au dernier terme près qui reste le même $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_1 (r_n = 1)$.

5° Soit $r_1, r_2, \ldots, r_n$ une suite quelconque de n restes consécutifs provenant de la division de $q, q^2, q^3, \ldots$ par un même diviseur, la période étant de n termes. Écrivons au-dessous une permutation circulaire quelconque de ces restes

$$\begin{array}{llll} r_1, & r_2, & \ldots, & r_n, \\ r_p, & r_{p+1}, & \ldots, & r_{p-1}. \end{array}$$

Si l'on fait les produits indiqués, leur somme sera multiple de D, à la condition qu'on ait $n > 2$.

6° $q, q^2, \ldots$, divisés par D, donnant lieu à une période de n termes, formons un multiple de D qui ait

n chiffres dans le système de numération de base q. Soit $\alpha_n\ \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1$ ce multiple. On sait qu'en écrivant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sous n restes consécutifs quelconques, la somme des produits sera égale à un multiple du diviseur. Démontrer qu'il en est de même aussi en écrivant $\alpha_1 \pm r_1$, $\alpha_2 \pm r_2, \ldots, \alpha_n \pm r_n$, ou bien $\alpha_1 \pm k, \ldots, \alpha_n \pm k$, au lieu des chiffres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ($r_1, \ldots, r_n$ sont n restes consécutifs quelconques, k est un entier quelconque).

THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

(suite, voir 2e série, t. IX, p. 317);

PAR M. J. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée de Bruges (Belgique).

---

4. Considérons maintenant, sur une droite D coupant la surface f en deux points réels ou imaginaires M et M', les différents couples de points (A, A') conjugués avec f. Soient C le milieu de MM' ou le *point central* de D (point central de l'involution des points A, A'), ($I_a, I_{a'}, I_c$) les indices de (A, A', C), et 2α, 2β les diamètres de la surface suivant les directions AA' et OC; nous aurons

$$I_a = \frac{AM.AM'}{\alpha^2} = \frac{AA'.AC}{\alpha^2}, \quad I_{a'} = \frac{A'A.A'C}{\alpha^2};$$

d'où

$$I_a I_{a'} = -\frac{AA'^2.CA.CA'}{\alpha^4}, \quad \frac{1}{I_a} + \frac{1}{I_{a'}} = \frac{\alpha^2}{AA'}\left(-\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'}\right).$$

Mais

$$CA.CA' = CM^2, \quad \frac{1}{CA'} - \frac{1}{CA} = \frac{A'A}{CA.CA'}, \quad I_c = -\frac{CM^2}{\alpha^2};$$

par conséquent

$$(5)\qquad \frac{I_a I_{a'}}{AA'^2} = -\frac{\overline{CM}^2}{\alpha^4} = \frac{I_c}{\alpha^2},$$

$$(6)\qquad \frac{1}{I_a} + \frac{1}{I_{a'}} = \frac{1}{I_c}.$$

Appelons, avec M. Faure, *indice d'une droite* par rapport à f, le rapport que l'on obtient en divisant le carré de la demi-corde déterminée par cette droite dans la surface, par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à cette droite. Les égalités (5) et (6) pourront s'énoncer comme il suit :

Si l'on considère tous les couples de points conjugués situés sur une même droite : 1° le produit des indices de deux points conjugués, divisé par le carré de la distance de ces points, est constant et égal à moins l'indice de la droite; 2° la somme des inverses des indices de deux points conjugués est constante et égale à l'inverse de l'indice du point central de la droite.

Comme cas particulier de cette dernière propriété, on a celle des points réciproques renfermée dans l'égalité (4).

Soit C′ le pôle de D dans la section centrale OMM′; ce point est le point central de la droite conjuguée avec D. Désignons par $I_{aa'}$ l'indice de D, par p et p' les perpendiculaires abaissées de O et de C′ sur D, par A et B les axes de la section OMM′; nous aurons

$$I_c = \frac{CC'.CO}{\beta^2} = \frac{pp'}{\beta^2 \sin^2(\alpha, \beta)};$$

d'où

$$I_{aa'} = -\frac{pp'}{\alpha^2\beta^2\sin^2(\alpha,\beta)} = -\frac{pp'}{A^2B^2}.$$

Par analogie, avec la définition de l'indice d'un plan (*voir* plus loin), le produit $(-pp')$ pourrait, dans la

théorie des coniques, recevoir un nom particulier, par exemple celui de *caractéristique* de la droite.

5. Cherchons l'expression analytique de l'indice d'une droite D déterminée par deux points X $(x_1, \ldots)$ et Y $(y_1, \ldots)$. Soient (m_1, m_2, m_3) les cosinus directeurs de D, l la distance XY, et M, M′ les points d'intersection de f et de D. Les distances XM et XM′ seront les racines de l'équation

$$\rho^2 f(m) + \rho \Sigma x_1 f_1(m) + f(x) = 0.$$

Par conséquent

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = (\mathrm{XM}' - \mathrm{XM})^2 = \frac{\Sigma^2 x_1 f_1(m) - 4f(x)f(m)}{f^2(m)},$$

et, comme $\alpha^2 = -\dfrac{f(\beta)}{f(m)}$, nous aurons

$$\mathrm{I}_{xy} = \frac{\Sigma^2 x_1 f_1(m) - 4f(x)f(m)}{4f^2(\beta)}.$$

Mais $m_r = \dfrac{x_r - y_r}{l}$, $f_r(m) = \dfrac{f_r(x) - f_r(y)}{l}, \ldots$; donc,

après quelques réductions faciles, il vient

$$\mathrm{I}_{xy} = \frac{\Sigma^2 x_1 f_1(y) - 4f(x)f(y)}{4 l^2 f^2(\beta)},$$

valeur qui convient également aux coordonnées obliques et aux coordonnées tétraédriques, à cause du caractère *covariant* des quantités $f(x)$, $f(y)$, $\Sigma x_1 f_1(y)$ et $f(\beta)$ (*).

Le numérateur de I_{xy} peut prendre deux formes re-

(*) En supposant les points X, Y conjugués de manière que $\Sigma x_1 f_1(y) = 0$, on retrouve l'égalité (5). En égalant le numérateur de I_{xy} à zéro, on a la condition pour que la droite XY soit tangente à f_1, ou l'équation d'un cône circonscrit à f, si l'on regarde Y comme fixe et X comme variable.

marquables. Désignant l'*émanant* $\frac{1}{2}\Sigma x_1 f_1(y)$ par $F(xy)$, de manière que $F(xy) = F(yx)$ et $F(xx) = f(x)$, nous pourrons écrire

$$I_{xy} = \frac{-1}{l^2 f^2(\beta)} \begin{vmatrix} F(xx), & F(xy) \\ F(yx), & F(yy) \end{vmatrix}.$$

Représentons par H' le déterminant des éléments B_{rs}; nous aurons (*voir* Baltzer-Hoüel, p. 47, 51, 145 et 146)

$$H'\left(H' \begin{matrix} xy \\ xy \end{matrix}\right) = \left(H' \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)\left(H' \begin{matrix} y \\ y \end{matrix}\right) - \left(H' \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)^2$$
$$= H^4[f(x)f(y) - F^2(xy)],$$
$$H' = H^3;$$

par suite

$$I_{xy} = \frac{-\left(H' \begin{matrix} xy \\ xy \end{matrix}\right)}{l^2 H f^2(\beta)}.$$

Supposons maintenant la droite D déterminée par l'intersection des deux plans $\Sigma p_1 x_1 = 0$, $\Sigma q_1 x_1 = 0$. Soient (z_1, z_2, z_3, z_4) les coordonnées du point central C de D. Les distances CM et CM' seront racines de l'équation

$$\rho^2 f(m) + \rho \Sigma z_1 f_1(m) + f(z) = 0,$$

et, comme $CM = -CM'$, on aura

$$\Sigma z_1 f_1(m) = 0, \quad CM^2 = -\frac{f(z)}{f(m)},$$

et par conséquent

$$I_{pq} = -\frac{f(z) f(m)}{f^2(\beta)}.$$

On a ici

$$m_1 = \frac{1}{L}\begin{vmatrix} p_2 q_2 \\ p_3 q_3 \end{vmatrix}, \quad m_2 = \frac{1}{L}\begin{vmatrix} p_3 q_3 \\ p_1 q_1 \end{vmatrix}, \quad m_3 = \frac{1}{L}\begin{vmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{vmatrix},$$

où L^2 désigne la somme des carrés des trois déterminants

$(p_2 q_3)$, $(p_3 q_1)$, $(p_1 q_2)$. Les coordonnées z résultent des équations $\Sigma p_1 z_1 = 0$, $\Sigma q_1 z_1 = 0$, $\Sigma z_1 f_1(m) = 0$; elles sont donc égales aux mineurs du système d'éléments

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & f_1(m) \\ p_2 & q_2 & f_2(m) \\ p_3 & q_3 & f_3(m) \\ p_4 & q_4 & f_4(m) \end{vmatrix}$$

multipliés par une certaine quantité μ, et, comme il faut avoir $x_4 = 1$, nous trouverons μ égal à l'inverse du quatrième mineur, qui, développé, est

$$(p_2 q_3) f_1(m) + (p_3 q_1) f_2(m) + (p_1 q_2) f_3(m),$$

ou $L \Sigma m_1 f_1(m)$, ou $2 L f(m)$. On reconnaît alors sans peine que

$$f(z) = \mu^2 \begin{pmatrix} \mathrm{H} & p\, q\, f'(m) \\ & p\, q\, f'(m) \end{pmatrix}.$$

Dans le déterminant à droite, remplaçons m_4 par zéro, ajoutons les trois premières lignes multipliées par $-2m_1$, $-2m_2$, $-2m_3$ à la septième ligne, et opérons ensuite d'une manière semblable sur les colonnes; la ligne et la colonne extrêmes deviennent $0, 0, 0, 0$, $-2(p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3)$, $-2(q_1 m_1 + q_2 m_2 + q_3 m_3)$, $-4 f(m)$; et, comme

$$p_1 (p_2 q_3) + \ldots = 0, \quad q_1 (p_2 q_3) + \ldots = 0,$$

il vient

$$f(z) = -4 \mu^2 f(m) \begin{pmatrix} \mathrm{H} & p\, q \\ & p\, q \end{pmatrix}$$

et, à cause de $\mu = \dfrac{1}{2 L f(m)}$,

$$\mathrm{I}_{pq} = \frac{\begin{pmatrix} \mathrm{H} & p\, q \\ & p\, q \end{pmatrix}}{L^2 f'^2(\beta)} = \frac{\begin{pmatrix} \mathrm{H} & p \\ & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{H} & q \\ & q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{H} & p \\ & q \end{pmatrix}^2}{L^2 \mathrm{H} f'^2(\beta)}.$$

On peut remplacer dans cette valeur L^2 par le produit $\sin^2(P, Q) \times (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \times (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$, ou simplement par $\sin^2(P, Q)$ si les plans sont donnés par des équations de la forme

$$x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\beta + x_3 \cos\gamma - \delta x_4 = 0.$$

Si les axes sont obliques, on a la même valeur de I_{pq}, pourvu qu'on remplace L^2 par

$$\Sigma (p_1 q_2)^2 + 2 \Sigma (p_1 q_2)(p_2 q_3) \cos x_3 x_1.$$

En coordonnées tétraédriques, on a encore une formule pareille.

6. Considérons un triangle $M_1 M_2 M_3$ conjugué avec une conique S; soient μ_r, μ_{rs} les indices du point M_r et de la droite $M_r M_s$ par rapport à S, M_4 le point central de $M_2 M_3$, 2α et 2β les diamètres suivant les directions $M_2 M_3$ et $M_1 M_4$, 2A et 2B les axes principaux de S. L'indice d'un diamètre étant évidemment l'inverse du carré de sa demi-longueur, nous avons

$$-\mu_{23} = \frac{\mu_2 \mu_3}{\overline{M_2 M_3}^2} = \frac{\mu_4}{\alpha^2},$$

$$-\mu_{14} = \frac{\mu_1 \mu_4}{\overline{M_1 M_4}^2} = -\frac{1}{\beta^2}.$$

Multiplions membre à membre ces relations; il vient

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\overline{M_2 M_3}^2 . \overline{M_1 M_4}^2} = -\frac{1}{\alpha^2 \beta^2}.$$

Mais $\alpha\beta \sin(\alpha, \beta) = AB$, $M_2 M_3 \times M_1 M_4 \sin(\alpha, \beta) = 2T$, T étant la surface du triangle; par suite

(7) $$A^2 B^2 - = \frac{4T^2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3}.$$

En remplaçant μ_1, μ_2, μ_3 par les rapports, pris en signe

contraire, des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle et du centre O sur les côtés, on peut déduire de l'égalité (7) le théorème Faure de la question 560, t. XX, p. 55.

Soient maintenant un triangle $M_1 M_2 M_3$ conjugué avec une surface du second ordre f, M_4 le pôle du plan $M_1 M_2 M_3$, M_5 le centre de la section S de f par ce plan, I_r l'indice de M_r par rapport à f, μ_r celui relatif à S, $2D$ et $2D'$ les axes de S, $2A$ et $2B$ ceux de la section centrale parallèle à S. On a, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$D^2 D'^2 = -\frac{4T^2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3}.$$

Mais $I_r = -\mu_r I_5$; car, en menant la sécante $M_r NN'$ parallèle à D, on a

$$I_r = \frac{M_r N . M_r N'}{A^2} = \frac{M_r N . M_r N'}{D^2} \frac{D^2}{A^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{4T^2} = \frac{I_5^3}{D^2 D'^2},$$

ou, à cause de $I_5 = -\frac{D^2}{A^2} = -\frac{D'^2}{B^2}$,

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{4T^2} = \frac{I_5}{A^2 B^2}.$$

Soient p, p' les perpendiculaires abaissées de O et de M_4 sur le plan $M_1 M_2 M_3$, $2C$ la longueur du diamètre $OM_4 M_5$, $2a$, $2b$ et $2c$ les axes principaux de f; on aura

$$I_5 = \frac{M_5 M_4 . M_5 O}{C^2} = \frac{p' p}{C^2 \sin^2(C, AB)},$$

$$ABC \sin(C, AB) = abc;$$

d'où

(8) $$pp' = \frac{I_1 I_2 I_3}{4T^2} \times a^2 b^2 c^2.$$

Appelons *indice d'un plan* le produit $(-p'p)$ des istances du pôle du plan et du centre de la surface à ce lan. Comme tous les triangles conjugués avec une coique S sont dits former une *involution plane* (*) dont le oint central est le centre de S, nous avons les propriétés iivantes de l'involution plane analogues à celles de l'involution rectiligne du n° 4 :

1° *Le produit des indices des sommets d'un triangle uelconque d'une involution plane, divisé par le carré e la surface de ce triangle, est constant et proportonnel à l'indice du plan ;*

2° *La somme des inverses des indices des sommets 'un triangle quelconque d'une involution plane est onstante et égale à l'inverse de l'indice du point central.*

V étant le volume du tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$, on peut emplacer, dans l'égalité (8), T^2 par $\frac{9V^2}{p'^2}$, et ensuite $\frac{p'}{p}$ par $-I_4$; il vient ainsi

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{36V^2}{I_1 I_2 I_3 I_4},$$

u, V_1, V_2,... ayant la même signification qu'au n° 3,

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{36 V_1 V_2 V_3 V_4}{V^2},$$

galités qui fournissent le théorème Faure de la queson 918, et le théorème Painvin, t. XIX, p. 294.

Voici encore une autre démonstration élégante de ces galités, tirée directement des formules du n° 4. Soient M_6 et M_7 les points centraux des arêtes opposées $M_1 M_2$ t $M_3 M_4$, D_{12}, D_{34}, D_{67} les demi-diamètres suivant les

(*) *Voir*, pour l'involution plane, les *Nouvelles Annales de Mathémaques*, 2e série, t. IV, p. 493 et 496.

directions conjuguées M_1M_2, M_3M_4, OM_6M_7; nous avons

$$-I_{12} = \frac{I_1 I_2}{\overline{M_1 M_2}^2} = \frac{I_6}{D_{12}^2},$$

$$-I_{34} = \frac{I_3 I_4}{\overline{M_3 M_4}^2} = \frac{I_7}{D_{34}^2},$$

$$-I_{67} = \frac{I_6 I_7}{\overline{M_6 M_7}^2} = -\frac{1}{D_{67}^2};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{\overline{M_1 M_2}^2 \times \overline{M_3 M_4}^2 . \overline{M_6 M_7}^2} = -\frac{1}{D_{12}^2 . D_{34}^2 . D_{67}^2}.$$

Multiplions les deux dénominateurs par

$$\sin^2(\widehat{D_{12}, D_{34}}) \sin^2(\widehat{D_{67}, D_{12} D_{34}});$$

alors le second dénominateur sera le volume du parallélépipède construit sur D_{12}, D_{34} et D_{67}, ou égal à abc; $M_6M_7 \sin(D_{67}, D_{12}D_{34})$ sera la plus courte distance δ de M_1M_2 et M_3M_4, et $\frac{1}{6} M_1M_2 \times M_3M_4 \times \delta \sin(M_1M_2, M_3M_4)$ le volume du tétraèdre (*); donc, etc.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR UNE QUESTION D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. E. LEMOINE,

Professeur.

Toute puissance entière μ d'un nombre entier l peut être obtenue en prenant la somme de l^k termes consé-

(*) Théorème connu de Timmermans et de Lenthéric. (Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2[e] série, t. V, p. 316.)

cutifs de la suite des nombres impairs, μ, k, l étant entiers et positifs, et $\mu \geqq 2k$.

En effet la somme de l^k nombres consécutifs de cette suite est

$$(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(2n+2l^k-1)=2nl^k+l^k.l^k.$$

Il suffit donc de démontrer que l'on a toujours pour n une valeur entière et positive satisfaisant à l'équation

$$2nl^k+l^k.l^k=l^\mu;$$

d'où

$$n=\frac{l^{\mu-k}-l^k}{2}=\frac{l^k(l^{\mu-2k}-1)}{2},$$

ce qui est toujours possible, car l'un des nombres l^k, $l^{\mu-2k}-1$ est pair.

Dans le cas de $\mu=2k$, on trouve

$$n=0,$$

résultat facile à prévoir, puisqu'on sait que

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

En faisant varier μ et k, on retrouve beaucoup de résultats connus et d'autres à volonté.

Je ferai remarquer seulement le suivant, qui correspond au cas de $\mu=5$, $k=2$:

Si l'on divise la suite des nombres impairs, à partir de 1, *en groupes tels que les* 1er, 3ième, 5ième,..., $(2n-1)^{\text{ième}}$ *groupes aient respectivement* $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ *termes, et les* 2ième, 4ième, 6ième,..., $2n^{\text{ième}}$ *groupes respectivement* 1, 3, 6,..., $\frac{n(n+1)}{2}$ *termes (suite des nombres triangulaires),* n^5 *sera la somme des termes du* $(2n-1)^{\text{ième}}$ *groupe et* $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2(2n+1)$ *celle du* $2n^{\text{ième}}$ *groupe.*

SUR LES COURBES PLANES A ÉQUATIONS TRINOMES;

PAR M. PH. GILBERT.

I. *L'enveloppe de la courbe qui a pour équation*

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{x_1}\right)^m + \left(\frac{y}{y_1}\right)^m = 1,$$

les paramètres (x_1, y_1) *devant vérifier l'équation*

$$(2) \qquad \left(\frac{x_1}{a}\right)^p + \left(\frac{y_1}{b}\right)^p = 1,$$

est la courbe

$$(3) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1 \ (*).$$

Cas particuliers. — 1° Si $\frac{mp}{m+p} = 1$, l'enveloppe se réduit à une droite ou à un système de droites; 2° si a, b sont les demi-axes d'une ellipse, menons une droite qui coupe ces axes aux distances du centre $\frac{a^2-b^2}{a}$, $\frac{a^2-b^2}{b}$; projetons un point quelconque de cette droite sur les axes : l'ellipse variable qui a ses sommets aux points de projection a pour enveloppe la développée de l'ellipse proposée.

II. *Soient* ρ et ρ' *les rayons de courbure de la courbe* (1) *et de son enveloppe* (3), *au point de contact.*

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 1re série, t XIII, p. 193.

On a la relation

$$\rho(m-1)=\rho'\left(\frac{mp}{m+p}-1\right),$$

indépendante de a et b.

III. *Le rapport des rayons de courbure d'une ellipse et de sa développée aux points correspondants est le tiers du rapport des portions de leurs tangentes respectives comprises entre les axes.*

IV. Si dans le problème (I) l'on suppose $p=\frac{2m}{m-1}$ et $m>1$, les équations (2) et (3) deviennent respectivement

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^{\frac{2m}{m-1}}+\left(\frac{y_1}{a}\right)^{\frac{2m}{m-1}}=1.$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m}{m+1}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2m}{m+1}}=1.$$

Soient S *et* S' *les aires de ces deux courbes dans l'angle des coordonnées positives. On a la relation*

$$SS'=\frac{\pi a^2 b^2}{8}\frac{m^2-1}{m}\,tg\,\frac{2m}{\pi}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 828

(voir 2e série, t. VI, p. 479);

PAR UN ÉTUDIANT DE L'UNIVERSITÉ DE TURIN.

Déterminer géométriquement un cercle qui coupe sous des angles donnés α, β, γ *trois autres cercles* A, B, C *donnés dans un même plan.*

1° Soient r_1 et r_2 les rayons de deux cercles, d la distance des centres, φ l'angle qu'ils font entre eux ; on a

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\varphi.$$

2° *Trois cercles de rayon r_1, r_2, r_3 ayant même axe radical, si un quatrième cercle variable coupe les deux premiers sous les angles variables α et β tels, que le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ soit constant, il coupe le troisième sous un angle γ tel, que le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$ est constant.*

En effet, prenons pour axe des x la droite des centres et pour axe des y l'axe radical commun aux trois cercles donnés ; appelons m, n, p les abscisses des centres de ces cercles ; α, β, γ les angles sous lesquels un cercle de rayon a et de centre (x, y) coupe ces trois cercles ; on a

$$m^2 - r_1^2 = n^2 - r_2^2 = p^2 - r_3^2,$$
$$(x - m)^2 + y^2 = r_1^2 + a^2 + 2ar_1 \cos\alpha,$$
$$(x - n)^2 + y^2 = r_2^2 + a^2 + 2ar_2 \cos\beta,$$
$$(x - p)^2 + y^2 = r_3^2 + a^2 + 2ar_3 \cos\gamma;$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{x(m - n)}{r_2 \cos\beta - r_1 \cos\alpha} = \frac{x(m - p)}{r_3 \cos\gamma - r_1 \cos\alpha},$$

et par conséquent

$$\frac{m - n}{r_2 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - r_1} = \frac{m - p}{r_3 \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} - r_1},$$

égalité qui démontre le théorème.

3° Réciproquement, on démontre facilement que *tous les cercles qui coupent trois cercles donnés sous des*

angles dont les cosinus sont proportionnels à des nombres donnés ont même axe radical.

La droite des centres de tous ces cercles passe évidemment par le centre radical des trois cercles donnés ; mais cette droite se réduit à ce point seulement lorsque les trois cosinus sont inversement proportionnels aux rayons des cercles donnés, et alors tous les cercles considérés sont concentriques.

4° *Tous les cercles qui coupent deux autres cercles donnés sous des angles dont les cosinus sont proportionnels à deux nombres donnés ont même centre radical* O.

Soient, en effet, A, B, C, D quatre cercles quelconques remplissant cette condition ; les centres radicaux de A, B, C et de A, B, D doivent se trouver en même temps sur la droite des centres des cercles donnés et sur l'axe radical de A et de B ; donc, etc.

Si le rapport donné des cosinus est l'inverse du rapport des rayons des cercles donnés, le théorème est en défaut.

Le centre radical O se réduit au centre d'homothétie directe ou inverse des deux cercles donnés, selon que le rapport constant des cosinus est $+1$ ou -1.

5° On démontre, ou plutôt on voit aisément, à l'aide du théorème n° 3, que *si l'on a trois cercles* O_1, O_2, O_3, *le centre radical des cercles qui coupent* O_1, O_2 *sous des angles* α *et* β *tels que* $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = h$, *le centre radical des cercles qui coupent* O_1, O_3 *sous des angles* α *et* γ *tels que* $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = k$, *et le centre radical des cercles qui coupent* O_2, O_3 *sous des angles* β *et* γ *tels que* $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{k}{h}$,

h et k étant des quantités constantes, ces trois centres, dis-je, *sont en ligne droite.*

Cette droite n'est autre chose que l'axe radical des cercles qui coupent O_1, O_2, O_3 sous des angles dont les cosinus sont proportionnels aux quantités h, k, 1.

Lorsqu'on a $h = \pm 1$, $k = \pm 1$, la droite en question se réduit à un des axes d'homothétie des trois cercles donnés.

6° Soit maintenant à *déterminer un cercle qui coupe trois cercles donnés* O_1, O_2, O_3 *sous des angles* α, β, γ.

Déterminons trois cercles qui coupent O_1 et O_2 sous les angles α et β, et déterminons ensuite les deux cercles tangents, c'est-à-dire qui coupent ces trois cercles arbitraires sous les angles 180 degrés et zéro; les centres de ces cercles se trouveront sur la droite des centres de O_1 et O_2. Faisons la même construction pour O_1 et O_3; on obtiendra ainsi quatre cercles auxquels doit être tangent, d'une manière déterminée, c'est-à-dire intérieurement ou extérieurement, le cercle cherché.

7° Il peut y avoir deux solutions. Il est à remarquer que, dans ce cas, il n'y en aurait aucune si l'on voulait couper les trois cercles sous les angles $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. Si O_1, O_2, O_3 ont même axe radical, le problème est impossible ou indéterminé. La solution pourrait, en certains cas, être rendue plus simple par la connaissance de la droite considérée au n° 3, sur laquelle doit se trouver le centre du cercle cherché.

Ce procédé, légèrement modifié, peut s'appliquer aux sphères.

8° Les propriétés énoncées ci-dessus donnent, ce me semble, une méthode plus courte que la méthode ordinaire pour construire les trois couples de circonférences conjuguées tangentes à trois cercles donnés.

En effet, les deux centres d'un couple se trouvent sur

une droite passant par le centre radical et perpendiculaire à l'axe d'homothétie des cercles donnés qui correspondent aux deux circonférences conjuguées que l'on cherche. Le problème est donc ramené à trouver l'intersection d'une droite avec une conique définie par ses foyers et son axe.

9° Il y a une autre manière d'envisager la question. Soient O_1, O_2, O_3 les centres des cercles de rayon r_1, r_2, r_3 que l'on veut couper sous les angles α, β, γ. Soit O le centre d'un cercle qui répond à la question. Si, par un point M d'une droite arbitraire MN, on mène trois droites de longueur r_1, r_2, r_3, faisant avec MN les angles α, β, γ, et si l'on appelle A, B, C les extrémités de ces droites, la question se réduit à trouver sur MN un point D tel, que les distances DA, DB, DC puissent représenter les distances des points O_1, O_2, O_3 à un point de leur plan.

On voit par là que, si l'on prend sur MN un point arbitraire H, que l'on nomme r'_1, r'_2, r'_3 les distances HA, HB, HC, et α', β', γ' les angles de ces droites avec MN, la question se réduit à couper des cercles de centres O_1, O_2, O_3, et de rayon r'_1, r'_2, r'_3 sous des angles α', β', γ'.

On peut prendre pour le point H un point qui facilite la solution de la question, par exemple le point où AB coupe MN.

Remarque. — M. Plücker a traité une question analogue et démontré les théorèmes n°s 2 et 3 dans un Mémoire inséré au dix-huitième volume des *Annales de Gergonne*.

Note. — Nous avons reçu une autre solution de M. Auguste Macé, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Question 832.

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 480);

PAR M. KOEHLER,
Capitaine du Génie.

Lorsqu'une conique est inscrite à un triangle, son paramètre est égal au diamètre du cercle inscrit multiplié par le produit des sinus des angles que font avec le cercle les droites qui joignent un des foyers aux sommets du triangle. (FAURE.)

Le triangle donné ABC étant pris pour triangle de référence, soit F un point du plan dont les coordonnées sont α, β, γ. Supposons d'abord que le point soit intérieur au triangle, c'est-à-dire que α, β, γ soient de même signe; je vais calculer le produit des sinus des angles que font les droites FA, FB, FC avec le cercle inscrit.

Les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle ont pour valeur commune $r = \frac{S}{P}$ (S désignant la surface, P le demi-périmètre du triangle).

Les sinus des angles dont il s'agit ont pour expressions

$$\sqrt{1 - \frac{d_A^2}{r^2}},\quad \sqrt{1 - \frac{d_B^2}{r^2}},\quad \sqrt{1 - \frac{d_C^2}{r^2}},$$

en appelant d_A, d_B, d_C les distances du centre aux trois droites.

Par la transformation des coordonnées, on reconnaît facilement que, dans le système employé, la distance d'un point (x, y, z) à une droite $lx + my + nz = 0$ a pour valeur

$$\frac{lx_1 + my_1 + nz_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2ml\cos C}}.$$

Les équations des droites FA, FB, FC sont

$$\beta x - \alpha y = 0, \quad \gamma x - \alpha z = 0, \quad \gamma y - \beta z = 0.$$

On a donc

$$d_A = \frac{\frac{S}{P}(\gamma - \beta)}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2 + 2\beta\gamma\cos A}},$$

$$d_B = \frac{\frac{S}{P}(\gamma - \alpha)}{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\gamma\cos B}},$$

$$d_C = \frac{\frac{S}{P}(\beta - \alpha)}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos C}}.$$

Les dénominateurs de ces expressions sont les côtés du triangle formé en joignant les pieds des perpendiculaires abaissées du point F sur les côtés de ABC; en les désignant, pour abréger, par a', b', c', nous aurons, pour les sinus, les valeurs

$$\frac{1}{a'}\sqrt{2\beta\gamma(\cos A + 1)}, \quad \frac{1}{b'}\sqrt{2\gamma\alpha(\cos B + 1)}, \quad \frac{1}{c'}\sqrt{2\alpha\beta(\cos C + 1)}.$$

Leur produit est

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{a'b'c'}\sqrt{8(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}.$$

Enfin, en remarquant que $1 + \cos A = \frac{2P(P-a)}{bc}, \ldots$, le radical devient

$$\frac{8P\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{abc} = \frac{8PS}{abc} = \frac{2P}{R},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le produit des sinus prend donc la forme $\frac{2P\alpha\beta\gamma}{Ra'b'c'}$, et,

en le multipliant par le diamètre du cercle inscrit, on a l'expression

$$(1)\qquad \frac{4S\alpha\beta\gamma}{Ra'b'c'}.$$

Si le point F était extérieur au triangle et compris, par exemple, dans l'angle A ou son opposé au sommet, on considérerait le cercle exinscrit tangent au côté a; dans l'expression du produit des sinus, on aurait sous le radical $1-\cos B$ et $1-\cos C$ au lieu de $1+\cos B$ et $1+\cos C$, comme il est facile de s'en assurer; ce produit deviendrait $\frac{2(P-a)\alpha\beta\gamma}{Ra'b'c'}$, et, en multipliant par le diamètre $\frac{2S}{P-a}$, on retrouverait encore l'expression (1).

Supposons maintenant que le point F soit le centre d'une conique inscrite. Le premier axe ρ de la courbe sera le rayon du cercle passant par les pieds des perpendiculaires abaissées du point F sur les côtés du triangle; on a donc

$$\rho = \frac{a'b'c'}{4s},$$

s étant la surface de ce triangle inscrit dans le premier.

Comme le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est égal au carré du deuxième axe ρ_1, on aura, en désignant par α_1, β_1, γ_1 les coordonnées du second foyer,

$$\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1 = \gamma\gamma_1 = \rho_1^2,$$

avec la relation

$$\alpha_1 \sin A + \beta_1 \sin B + \gamma_1 \sin C = \frac{S}{R}.$$

Ces équations donnent immédiatement les coordonnées du second foyer, et la valeur de ρ_1^2

$$\rho_1^2 = \frac{\alpha\beta\gamma S}{R(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C)} = \frac{\alpha\beta\gamma S}{2Rs}.$$

D'après cela, le paramètre $\frac{2\rho_1^2}{\rho}$ est égal à $\frac{4\alpha\beta\gamma S}{R a' b' c'}$. C'est précisément l'expression (1). Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si le point F était sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC, ses coordonnées α, β, γ satisferaient à l'équation

$$\alpha\beta \sin C + \gamma\alpha \sin B + \beta\gamma \sin A = 0.$$

Les valeurs des deux axes se présenteraient sous la forme de l'infini, et la conique serait une parabole. Mais la valeur trouvée pour le paramètre n'en subsisterait pas moins.

On peut d'ailleurs s'en assurer directement en considérant une parabole $y^2 = 2px$, le triangle formé par trois tangentes

$$y = mx + \frac{p}{2m}, \quad y = m'x + \frac{p}{2m'}, \quad y = m''x + \frac{p}{2m''},$$

et en calculant l'expression (1). On vérifie ainsi qu'elle reproduit le paramètre $2p$.

Je n'insisterai pas sur ce calcul, qui est très-symétrique et très-simple.

CORRESPONDANCE.

M. Catalan nous écrit, au sujet de l'article de M. Alexandre (numéro de juillet, p. 293).

« Je crois que l'honorable auteur ne sera pas fâché de savoir qu'il s'est rencontré avec M. Le Besgue.

» Il y a plus de trente ans, M. *Vincent* me remettait un fragment d'une lettre de M. Le Besgue, fragment que j'ai précieusement conservé. En voici la copie fidèle :

« Si le *Géomètre* de M. *Guillard* vient à ressusciter,
» veuillez faire de la Note ci-jointe tel usage qu'il vous
» semblera bon.

» Si, dans une équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

» on a $q^2 = 3pr$, les trois derniers termes appartiennent
» à un cube, et l'on trouve de suite la racine. Si $q^2 = 3pr$
» n'est pas satisfaite, posez $x = y + a$, et dans la trans-
» formée $y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$, faites $Q^2 = 3PR$,
» ou bien $(3q - p^2)a^2 + (pq - 9r)a + 3pr - q^2 = 0$,
» il en résultera pour la racine x de l'équation primitive

$$(3x + p) = \sqrt[3]{(3q - p^2)(3a + p)} - \frac{3q - p^2}{\sqrt[3]{(3q - p^2)(3a + p)}},$$

» où l'on peut mettre pour a une racine quelconque de
» l'équation en a, etc. »

» Il me semble que ces quelques lignes renferment tout ce que M. Alexandre a publié.

» La lettre de M. Le Besgue porte le timbre de Bordeaux (22 février 1838).

» Dans le *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, j'ai proposé comme exercice l'ingénieuse formule de M. Le Besgue. »

EXERCICES.

Dans un journal de Mathématiques suédois, on trouve les énoncés de quelques questions que nous mettons sous les yeux de nos lecteurs, soit comme exercices, soit pour leur faire connaître l'esprit des études de mathématiques à l'étranger (*).

(*) Nous devons ces renseignements à M. Hoüel.

1. Si les bissectrices BD, EA des angles ABE, DEB, qui ont un côté commun BE, sont égales, ces angles sont aussi égaux.

2. Si deux triangles ont une médiane commune et que la demi-base de l'un soit moyenne proportionnelle entre les deux côtés de l'angle opposé de l'autre triangle et parallèle à la bissectrice de cet angle, la demi-base du second triangle sera aussi moyenne proportionnelle entre les deux côtés de l'angle opposé du premier et parallèle à la bissectrice de cet angle.

Remarque. — Ces deux questions sont des sujets de prix; les solutions devront être envoyées, avant le 1[er] janvier 1871, au lecteur Hultmann, à Stockholm (Suède).

Le premier prix consistera dans l'*Algèbre* de Todhunter;

Le second, dans la *Trigonométrie plane* du même auteur.

Voici quel était le sujet de prix pour 1869 :

Sur les côtés a, b, c d'un triangle quelconque, on construit des carrés extérieurs; on joint les sommets extérieurs de ces carrés par les droites a_1, b_1, c_1, ces droites étant menées de manière à ne couper aucun carré. Sur les lignes a_1, b_1, c_1 ainsi obtenues, on construit de nouveaux carrés extérieurs, dont on joint les sommets extérieurs par les droites a_2, b_2, c_2, de manière qu'aucune de ces lignes ne coupe les carrés. Sur a_2, b_2, c_2, on construit de nouveaux carrés, et l'on continue ainsi indéfiniment. On peut alors démontrer que

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 16(a^2 + b^2 + c^2).$$

En poussant plus loin le calcul, quelle sera la somme des trois carrés suivants? Quelle sera la somme des trois

$n^{ièmes}$ carrés? Quelles sont les propriétés des trapèzes situés entre les carrés?

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Session du 4 juillet 1870.

1re *Question.* — Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x;$$

A, B, C, D sont des constantes.

2e *Question.* — Un point matériel P est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe O et qui dépend de la distance r du point P au point O. L'action de la force sur l'unité de masse s'exprime par la formule

$$\varphi = \frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}.$$

On suppose le point P placé d'abord en C à une distance a du centre O. On imprime à ce point une vitesse perpendiculaire au rayon OC et égale à $\frac{k}{a}$.

Déterminer son mouvement.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1870.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Mathématiques spéciales.

On donne dans un plan deux ellipses concentriques ayant mêmes directions d'axes, et l'on demande le lieu

des points tels, que les cônes ayant ces points pour sommets et les ellipses pour directrices soient égaux.

Mathématiques élémentaires.

On donne une circonférence dont le centre est en O et un point P dans son intérieur; par le point P, on mène deux cordes rectangulaires quelconques APC, BPD; on forme le quadrilatère inscrit ABCD en joignant les extrémités de ces cordes; on trace ensuite les tangentes au cercle aux points A, B, C, D : les points de rencontre des tangentes consécutives sont les sommets d'un second quadrilatère $A_1 B_1 C_1 D_1$. Démontrer que ce deuxième quadrilatère est inscriptible dans un cercle dont le centre est sur la droite OP; exprimer, au moyen du rayon du cercle O, de la distance OP et de l'angle de l'une des cordes avec OP (l'angle APO, par exemple), les segments des cordes, les côtés du quadrilatère inscrit, les segments des côtés du quadrilatère circonscrit, et les sinus des angles de ce quadrilatère. Démontrer, à l'aide des relations obtenues, que le produit des côtés du quadrilatère inscrit, la distance des centres des deux cercles et le rayon du deuxième cercle demeurent invariables, lorsqu'on fait tourner les cordes autour du point P.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE (ANNÉE 1870).

Composition en Mathématiques.

Démontrer la formule qui donne le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles. Déterminer la différence entre le volume de ce tronc et celui d'un prisme de même hauteur qui aurait pour base la section plane équi-

distante des deux bases et parallèle à ces bases. On construit un prisme ayant même volume que cette différence, même hauteur que le tronc et une base semblable à celles du tronc, et on demande de déterminer un des côtés de cette base en fonction des deux côtés qui lui sont homologues dans les deux bases du tronc.

(Durée de la séance : trois heures.)

Composition en Trigonométrie et calcul logarithmique.

Un triangle a un côté dont la longueur est de $324^{m},6237$.

Les angles adjacents sont égaux respectivement à $67^{\circ}\,35'\,6'',10$ et à $38^{\circ}\,44'\,27'',6$.

On demande de résoudre le triangle et d'exprimer, avec sept figures, successivement en centimètres carrés, en mètres carrés, en ares, en hectares, en kilomètres carrés, sa surface et celles des trois triangles qu'on forme en joignant aux trois sommets le centre du cercle circonscrit.

(Durée de la séance : trois heures.)

QUESTION.

---

998. Les points de rencontre des hauteurs des triangles isoscèles formés par quatre tangentes quelconques à une circonférence et par les cordes de contact sont les sommets d'un parallélogramme parallèle et semblable à celui qu'on obtient en prenant les milieux du quadrilatère inscrit. Le centre de similitude est le centre de la circonférence, et le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. (H. Brocard.)

BIBLIOGRAPHIE.

ᴄʜʟöᴍɪʟᴄʜ (O.). *Compendium der höheren Analysis* Dritte verbesserte Auflage. In zwei Banden. Erster Band. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1869 (*).

Avant d'entrer dans le détail de la composition de cet xcellent Traité, nous allons exposer quelques vues critiques sur la méthode suivie par l'auteur, et qui est aussi elle de la plupart des ouvrages modernes sur le Calcul nfinitésimal. Il s'agit, il est vrai, d'une simple question e forme, peu importante lorsqu'il s'agit de Traités rédiés au point de vue de la Science élevée, et dont la lecure suppose la connaissance des éléments. Mais cette uestion de forme devient capitale dans un livre destiné ux commençants, et s'il règne encore tant d'idées fausses ur la nature du Calcul infinitésimal, la faute en est, se›n nous, au peu de développement que les Traités éléıentaires accordent généralement à ce qu'on appelle npropremeut la *métaphysique* de ce Calcul, et aux coneptions artificielles à l'aide desquelles on a cru pouvoir viter certaines difficultés apparentes, qui se représentent lus tard sous un aspect plus embarrassant, et qui finisent par former une lacune irréparable dans l'éducation ıathématique.

La première précaution de l'auteur d'un Traité d'Anaуse doit être d'écarter de l'esprit des commençants la otion, toute physique, de grandeur *absolue*, et la notion

(*) *Précis d'Analyse supérieure*, par O. Schlömilch; 3e édition, revue corrigée. En deux volumes. Tome Ier. Brunswick, chez Fr. Vieweg et s; 1869. In-8° (563 pages). Prix : 11 fr.

métaphysique de l'infini *absolu*. Les quantités mathématiques sont *plus* ou *moins* grandes les unes que les autres ; aucune n'est ni grande ni petite, si on la considère en elle-même et indépendamment de la portée de nos sens.

L'infini métaphysique est une quantité ayant une existence *actuelle*, et, par suite, une quantité *constante* et *n'ayant point* de limites. L'infini mathématique, au contraire, est une quantité *variable*, n'ayant *actuellement* aucune valeur particulière, mais pouvant prendre toutes les valeurs, *quelque grandes qu'elles soient*. Ce n'est pas la valeur qu'elle peut *posséder* qui est sans bornes, l'absence de bornes étant essentiellement incompatible avec toute considération mathématique. Mais les bornes que l'on peut assigner à cette quantité sont *variables*, et ne sont assujetties *à aucune restriction* dans le sens des grandeurs croissantes.

L'infiniment petit n'est pas une quantité *nulle*, encore moins une entité mystérieuse qui ne serait ni nulle ni finie. Comme l'infiniment grand, l'infiniment petit est essentiellement une *variable*, n'ayant actuellement aucune valeur donnée, mais pouvant prendre toutes les valeurs, de manière à devenir, si l'on veut, moindre que toute grandeur assignée d'avance.

Dans une figure de géométrie infinitésimale, abstraction faite de l'imperfection inévitable du dessin, les longueurs infiniment petites sont représentées en *vraie grandeur*, et il faut se garder de considérer les constructions comme donnant une sorte d'induction, relativement à ce qui se passerait, si les lignes devenaient assez petites pour échapper à nos regards. Les figures, comme celles de la géométrie des quantités finies, représentent un *état possible* des variables. Seulement, en raison du but spécial que l'on se propose, on peut négliger dans les

résultats certains termes dont on sait d'avance que l'influence finale sera nulle.

La *limite* d'une variable est une *constante* dont la variable peut différer *infiniment peu*, sans que cette différence puisse jamais s'annuler. Il faut généralement combattre cette idée fausse, mais assez répandue, que la limite *fait partie de la série des valeurs possibles* de la variable. Au contraire, la limite est précisément ce que la variable *ne peut pas être*; elle est définie par exclusion (par *exhaustion*, comme disaient les anciens géomètres), et l'usage de la variable dans la méthode des limites est de pouvoir renfermer la constante cherchée dans des bornes indéfiniment resserrées.

La méthode infinitésimale, dégagée des entités métaphysiques qui l'ont si longtemps obscurcie, est *identique* pour le fond avec la méthode des limites, et n'en diffère que par l'adoption de certaines abréviations de langage et de certains procédés de calcul plus expéditifs. Il s'agit, dans les deux cas, de trouver les limites de certaines variables, et les infiniment petits ne sont autre chose que des variables auxiliaires, dont la limite est zéro.

Lorsqu'une équation, posée en vue du calcul d'une limite, contient des termes, que l'on sait d'avance ne devoir jouer aucun rôle dans la détermination de la quantité cherchée, on peut faire tout d'abord abstraction de ces termes. On sacrifie ainsi l'exactitude des *équations auxiliaires*, qui deviennent des équations *imparfaites*. Mais l'erreur volontairement commise n'altérera pas le résultat, ou plutôt ce n'est pas une erreur, mais une simple abréviation, qui revient au même que si l'on avait remplacé les termes omis par un *etc.*

D'après cela, il revient absolument au même de représenter par dy l'accroissement lui-même d'une fonction y, correspondant à l'accroissement infiniment petit dx de

la variable indépendante, ou de désigner par dy une partie de cet accroissement, qui ne diffère du tout que d'une fraction infiniment petite de ce tout. Seulement cette dernière conception est artificielle, et la double notation que l'on est alors amené à employer, en représentant l'accroissement total par la caractéristique Δ, nous semble non-seulement une complication inutile, mais encore une des principales sources des idées fausses ou incomplètes que tant de personnes se font sur le Calcul différentiel. Cette introduction de la notation des différences finies dans le Calcul infinitésimal porte, en effet, à croire que Δ désigne les accroissements *visibles*, comme ceux que l'on trace sur la figure, tandis que d est réservé pour les accroissements qui *deviennent* infiniment petits, c'est-à-dire, suivant le même ordre d'idées, qui deviennent, pour ainsi dire, ultra-microscopiques, à moins que, comme le veulent certains auteurs, les expressions telles que dy ne soient de purs symboles, n'ayant plus d'autre sens que d'indiquer par leurs combinaisons des limites de rapports. Dans le premiers cas, on ouvre la porte aux idées fausses, et même aux non-sens; dans le second, par une timidité excessive, on se prive de la représentation sensible de toutes les phases du calcul.

On éviterait ces inconvénients en réservant la caractéristique Δ pour les différences *finies* et *constantes* (en ce qui concerne du moins l'accroissement de la variable indépendante), et désignant par d les accroissements *infiniment petits*, auxquels rien n'empêche, comme nous l'avons dit, d'attribuer une valeur perceptible quelconque, lorsqu'on étudie leurs relations. C'est ce qu'avait fait M. Duhamel, dans la première édition de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1840-41), et cette voie nous semble la plus naturelle et la plus propre à donner une intelligence complète de la méthode infinité-

simale. A l'avantage de donner des idées plus nettes, elle joint celui d'habituer dès le début à l'emploi rigoureux d'un langage que tôt ou tard on sera forcé d'adopter, pour peu que les questions deviennent compliquées, et l'on ne sera pas obligé, pour rassurer sa conscience, de donner, comme le faisait un illustre professeur, deux démonstrations de chaque proposition, une courte et une plus rigoureuse.

Une dernière critique que nous ferons à tous les Traités d'Analyse, à l'exception de l'excellente *Théorie des Fonctions* de M. Cournot, c'est de séparer d'une manière trop absolue le Calcul intégral du Calcul différentiel. Que l'on traite dans des Chapitres à part les parties de ces deux Calculs qui exigent des développements spéciaux, rien de plus naturel. Mais on doit rechercher toutes les occasions de rattacher l'une à l'autre les deux opérations inverses de la différentiation et de l'intégration, surtout quand on peut obtenir ainsi des simplifications notables dans l'exposition du Calcul différentiel. Il vaut mieux employer ouvertement l'algorithme du Calcul intégral que d'avoir recours, comme on le fait si souvent, à des intégrations déguisées. D'ailleurs une telle marche présente le très-grave inconvénient d'obliger à laisser inachevée l'exposition de théories, qui devraient se placer naturellement à côté d'autres appartenant au Calcul différentiel proprement dit. Nous pourrions citer à l'appui des exemples pris dans les Traités français les plus justement estimés, et dans l'Ouvrage même dont nous allons rendre compte en ce moment.

Le *Précis* de M. Schlömilch se compose de deux volumes, dont le premier, le seul dont nous devons nous occuper aujourd'hui, contient à peu près les matières de l'enseignement de notre École Polytechnique et du programme de la licence ès sciences mathématiques. Le

second volume, auquel nous consacrerons un article spécial, forme un excellent complément aux Traités ordinaires de Calcul infinitésimal. Nous espérons cependant que l'Auteur, dans sa troisième édition, ajoutera à cette partie complémentaire des théories dont l'absence serait à regretter, telles que la théorie des équations aux dérivées partielles, le Calcul des variations et le Calcul aux différences finies.

Le premier volume se divise en deux Parties, à peu près d'égale étendue, consacrées l'une au Calcul différentiel, l'autre au Calcul intégral.

Après une Introduction, contenant les notions préliminaires sur la continuité des fonctions, et la détermination par voie algébrique des limites de plusieurs expressions importantes, l'Auteur expose, dans le premier Chapitre, les définitions du Calcul différentiel et la recherche des différentielles des premiers ordres des fonctions élémentaires. Nous remarquerons que, dans ce Chapitre, non plus que dans le reste du livre, l'Auteur ne prononce pas une seule fois le mot d'infiniment petit.

Le Chapitre II traite des dérivées et des différentielles des ordres supérieurs, et de leur calcul direct dans les cas les plus simples. Dérivées et différentielles des divers ordres des fonctions de plusieurs variables. Relations entre les accroissements d'une fonction et les valeurs moyennes de ses dérivées.

Dans le Chapitre III, l'Auteur développe les applications du Calcul différentiel à la théorie des courbes et des surfaces.

Les deux Chapitres suivants ont pour objet la détermination des valeurs-limites des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée, et la théorie des maxima et minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables.

Les Chapitres VI et VII sont consacrés à la théorie des séries, aux conditions de convergence des séries simples et doubles, aux théorèmes de Taylor et de Maclaurin, et à leur application au développement des principales fonctions. Plusieurs passages de ces Chapitres auraient pu être simplifiés et éclairés, si l'Auteur ne s'était pas interdit le secours des premiers éléments du Calcul intégral.

Le Chapitre VIII contient les premières notions sur les fonctions de variables complexes, sur leur différentiation et leur développement en séries.

Le Chapitre IX, qui termine le Calcul différentiel, traite des applications des théories précédentes à la théorie des équations algébriques, et à la décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.

Dans le Chapitre X, qui commence la seconde partie du volume, sont exposés les préliminaires du Calcul intégral. Les trois Chapitres suivants traitent de l'intégration des fonctions simples.

Le Chapitre XIV contient les applications géométriques du Calcul intégral : quadratures exactes ou approximatives des aires planes, rectifications des courbes, cubature et complanation des surfaces courbes.

Le Chapitre XV donne les principales méthodes élémentaires pour le calcul des intégrales définies simples.

Les intégrales définies multiples font l'objet du Chapitre suivant, qui traite des applications géométriques aux cubatures dans les divers systèmes de coordonnées, et du changement de variables dans les intégrales doubles et triples. Ce dernier point aurait pu être exposé avec plus de simplicité, si l'Auteur eût voulu faire usage des déterminants.

Les trois derniers Chapitres contiennent un exposé très-abrégé de la théorie des équations différentielles dans le cas d'une seule variable indépendante.

Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous ait pas permis de signaler les précieuses remarques et les démonstrations nouvelles que le savant Auteur a introduites dans son Ouvrage, qui se distingue par les qualités de rédaction et par la belle exécution typographique.

M. Schlömilch publie en ce moment, cemme complément à son Traité, un excellent recueil d'exercices (*), dont la première Partie a paru en 1868, et qui est appelé à rendre les plus utiles services à l'enseignement des hautes mathématiques. J. Hoüel.

NOTE SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

1. L'objet de cette Note est de démontrer et de généraliser, au moyen de la théorie des *déterminants*, cette proposition que :

« Si neuf quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, réelles ou *imaginaires*, satisfont aux conditions

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0,\\ a'^2+b'^2+c'^2=1, & aa''+bb''+cc''=0,\\ a''^2+b''^2+c''^2=1, & a'a''+b'b''+c'c''=0, \end{array}\right.$$

elles satisferont, de même, aux six conditions suivantes

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''b''=0,\\ b^2+b'^2+b''^2=1, & ac+a'c'+a''c''=0,\\ c^2+c'^2+c''^2=1, & bc+b'c'+b''c''=0. \text{ »} \end{array}\right.$$

(*) *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung.* Leipzig, Verlag von B. G. Teubner; 1868. — In-8° (264 p.). Prix : 6 fr. 50 c.

Les quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, pouvant être considérées comme les éléments du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

la proposition à démontrer revient à celle-ci :

« Lorsque, dans un déterminant du troisième ordre, la somme des carrés des éléments de chaque ligne horizontale est égale à l'unité, et qu'en outre la somme des produits obtenus en multipliant respectivement les éléments d'une ligne horizontale par les éléments correspondants d'une autre ligne horizontale est nulle, quels que soient les rangs des deux lignes considérées, les mêmes relations ont lieu entre les éléments des colonnes, ou lignes verticales, de ce déterminant. »

Énoncée de cette manière, la proposition est générale, dans ce sens qu'elle s'étend à un déterminant d'un ordre quelconque.

Dans la démonstration que nous allons donner, nous prendrons pour exemple un déterminant du troisième ordre; mais il sera facile de reconnaître que la même démonstration s'applique à tout déterminant dont les lignes horizontales sont composées d'éléments satisfaisant aux deux conditions indiquées.

1° Le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ est égal à ± 1.

Car, en nommant D la valeur de ce déterminant, on a

$$D^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' & aa'' + bb'' + cc'' \\ aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 & a'a'' + b'b'' + c'c'' \\ aa'' + bb'' + cc'' & a'a'' + b'b'' + c'c'' & a''^2 + b''^2 + c''^2 \end{vmatrix},$$

ou, en ayant égard aux égalités (1),

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

donc $D = \pm 1$.

2° Les coefficients des éléments du déterminant D sont égaux à ces éléments pris avec leurs signes, ou en signes contraires, suivant que D est positif ou négatif.

C'est-à-dire qu'en désignant par α, β, γ, α',..., γ'' les coefficients des éléments a, b, c, a',..., c'' dans le développement du déterminant D, on a

$$\alpha = \pm a, \quad \beta = \pm b, \quad \gamma = \pm c, \quad \alpha' = \pm a', \ldots, \quad \gamma'' = \pm c'';$$

les signes supérieurs correspondant à $D = +1$, et les signes inférieurs à $D = -1$.

En effet, multiplions respectivement par a, b, c les éléments des colonnes de D, il en résultera

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ aa' & bb' & cc' \\ aa'' & bb'' & cc'' \end{vmatrix} = Dabc = \pm abc.$$

Puis, ajoutons aux éléments de la première colonne de ce dernier déterminant les éléments correspondants des autres colonnes, il viendra

$$\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 0 & bb' & cc' \\ 0 & bb'' & cc'' \end{vmatrix} = \pm abc,$$

égalité qui donne successivement

$$bc \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = \pm abc; \quad \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = \pm a.$$

Iais

$$\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = \alpha,$$

onc $\alpha = \pm a$.

On établira de même les égalités $\beta = \pm b$, $\gamma = \pm c$, $\alpha' = \pm a', \ldots$; et il est clair que les seconds membres le ces égalités doivent être précédés du signe $+$ ou du igne $-$ suivant que la valeur de D est $+1$ ou -1.

3° On a

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$

Les trois premières de ces égalités s'obtiennent immédiatement, en observant que la valeur ± 1 du déterminant D est représentée par chacune des expressions $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha''$, $b\beta + b'\beta' + b''\beta''$, $c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma''$, lans lesquelles les coefficients α, α', α'',... sont égaux ux éléments a, a', a'',..., pris avec leurs signes si $D = +1$, et en signes contraires quand $D = -1$.

Les trois dernières se déduisent de même des relations onnues

$$a\beta + a'\beta' + a''\beta'' = 0,$$
$$a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' = 0,$$
$$b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' = 0.$$

La proposition est ainsi démontrée.

Remarque. — Les coefficients α, β, γ, α',..., γ'' étant égaux aux éléments a, b, c, a',..., c'', ou à ces éléments changés tous de signe, on peut remplacer, dans les égalités (1) et (2), a, b, c, a',..., c'', par α, β, γ, α',..., γ'' sans que ces égalités cessent d'exister. Ainsi, *la somme les carrés des coefficients des éléments d'une ligne ho-*

rizontale, ou verticale, du déterminant D *est égale à l'unité.*

2. Pour montrer une application de ce qui précède, supposons que les droites OA, OB, OC représentent trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et désignons par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les coordonnées des extrémités A, B, C de ces diamètres.

Dans le déterminant

$$(\Delta) \qquad \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \end{vmatrix}$$

la somme des carrés des éléments de chaque ligne horizontale est égal à $+1$, et la somme des produits obtenus en multipliant respectivement les éléments d'une ligne horizontale quelconque par les éléments d'une autre ligne horizontale est nulle; donc les sommes des carrés des éléments de chacune des lignes verticales sont égales à $+1$. De là les égalités

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2,$$

qui font voir que les sommes des carrés des projections des diamètres conjugués sur les axes a, b, c sont respectivement égales aux carrés de ces axes. Conséquemment, *la somme des carrés de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde est égale à la somme des carrés des trois axes.*

Le déterminant (Δ) étant égal à ± 1, on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \pm abc.$$

Mais la valeur absolue de ce dernier déterminant représente le volume du parallélépipède construit sur les trois droites OA, OB, OC (*); donc *le parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde est équivalent au parallélépipède des axes.*

Les éléments $\frac{z_3}{c}, \frac{z_2}{c}, \frac{z_1}{c}$ de (Δ) ont pour coefficients les déterminants partiels

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{y_1}{b} & \frac{x_1}{a} \\ \frac{y_3}{b} & \frac{x_3}{a} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix};$$

la somme des carrés de ces trois coefficients étant égale à $+1$ (*Remarque* du numéro précédent), on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 = a^2 b^2.$$

Or, les valeurs absolues des déterminants

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

représentent les aires des projections, sur le plan XOY,

(*) Cela résulte de ce que l'expression du volume du tétraèdre OABC, en fonction des coordonnées des sommets O, A, B, C, est

$$\pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

des parallélogrammes construits avec les droites OA, OB, OC, considérées deux à deux (*); par conséquent, *la somme des carrés des projections, sur le plan* XOY, *des parallélogrammes construits avec trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde est égale au carré du rectangle des axes qui appartiennent à ce plan.* La même proposition s'appliquant aux projections de ces parallélogrammes sur les deux autres plans de coordonnées, il en faut conclure que :

La somme des carrés des aires des trois parallélogrammes construits sur des diamètres conjugués de l'ellipsoïde est égale à la somme des carrés des trois rectangles construits sur les axes de l'ellipsoïde.

(G.)

(*) Soient A', B', C' les projections des points A, B, C sur le plan XOY. L'aire du triangle OA'B' en fonction des coordonnées de ses sommets O, A', B', a pour expression

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

La projection du parallélogramme construit sur les droites OA, OB étant le double du triangle OA'B' a une surface égale à

$$\pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

On démontrerait de même que les aires des projections des deux autres parallélogrammes sont représentées par

$$\pm\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \pm\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

(suite, voir 2e série, t. IX, p. 317 et 360);

PAR M. J. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée de Bruges (Belgique).

7. Cherchons l'expression analytique de l'indice d'un plan.

La surface et le plan ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0,$$

et les coordonnées du pôle de ce plan étant (x_1, y_1, z_1), on a

$$p=-\delta,\quad p'=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-\delta.$$

Mais, en identifiant les deux équations du plan

$$x\cos\alpha+\ldots=0\quad \text{et}\quad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0,$$

on a

$$x_1=\frac{a^2\cos\alpha}{\delta},\ldots;$$

par conséquent, l'indice π du plan a pour valeur

$$\pi=-pp'=a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma-\delta^2.$$

Si la surface et le plan sont donnés par les équations générales $f(x)=\Sigma A_{rs}x_rx_s=0$, $\Sigma p_1x_1=0$, on a, en désignant par $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ les coordonnées du pôle du plan,

$$\pi=-\frac{\Sigma p_1\nu_1\times\Sigma p_1\beta_1}{p_1^2+p_2^2+p_3^2}.$$

Mais on doit avoir $\Sigma p_1 x_1 \equiv \frac{1}{2}\lambda \Sigma x_1 f_1(\nu)$, λ étant un facteur indéterminé; par conséquent

$$\Sigma p_1 \beta_1 = \tfrac{1}{2}\lambda \Sigma \beta_1 f_1(\nu) = \tfrac{1}{2}\lambda \Sigma \nu_1 f_1(\beta) = \lambda f(\beta),$$

à cause de $f_1(\beta) = f_2(\beta) = f_3(\beta) = 0$, $2f(\beta) = f_4(\beta)$. En posant $\Sigma p_1 \nu_1 = U$, on obtient U par l'élimination des ν entre les cinq équations

$$\tfrac{1}{2} f_r(\nu) = A_{r1}\nu_1 + A_{r2}\nu_2 + A_{r3}\nu_3 + A_{r4}\nu_4 = \frac{p_r}{\lambda}\ (r = 1, 2, 3, 4),$$

$$p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + p_3\nu_3 + p_4\nu_4 = U;$$

il vient ainsi

$$U = -\frac{\begin{pmatrix} H & p \\ & p \end{pmatrix}}{\lambda H}.$$

Par conséquent

$$(9) \qquad \pi = \frac{\begin{pmatrix} H & p \\ & p \end{pmatrix} f(\beta)}{H(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}.$$

Cette formule convient aussi aux axes obliques et aux coordonnées tétraédriques, si l'on remplace la somme $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ par une certaine fonction de p_1, p_2, p_3, p_4, et des angles des axes obliques ou des angles du tétraèdre de référence. On peut remarquer que $\begin{pmatrix} H & p \\ & p \end{pmatrix} = 0$ est l'équation tangentielle de f.

L'indice d'un plan s'exprime encore très-élégamment en fonction des coordonnées de trois quelconques de ses points X, Y, Z. En effet, désignons par p_1, p_2, p_3, p_4 les mineurs du système

$$(P) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix};$$

l'équation du plan sera $\Sigma t_1 p_1 \equiv \frac{1}{2}\lambda \Sigma t_1 f_1(\nu) = 0$, t re-

présentant les coordonnées courantes. Par suite,

$$\pi = -\frac{\Sigma \nu_1 p_1 \times \Sigma \beta_1 p_1}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

Mais on a $\Sigma \beta_1 p_1 = \lambda f(\beta)$, et les coordonnées ν résultent des quatre équations

$$\tfrac{1}{2} f_r(\nu) = A_{r1}\nu_1 + A_{r2}\nu_2 + A_{r3}\nu_3 + A_{r4}\nu_4 = \frac{p_r}{\lambda}.$$

Par conséquent,

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda H}\begin{vmatrix} p_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ p_2 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ p_3 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ p_4 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix},$$

et, comme les p sont les mineurs du système (P), on peut obtenir le déterminant à droite en faisant le produit du système (P) par le système

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}.$$

On en conclut (*)

$$\nu_1 = \frac{1}{8\lambda H}\begin{vmatrix} f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) \\ f_2(z) & f_3(z) & f_4(z) \end{vmatrix}.$$

On voit donc que $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sont égaux aux mineurs du système

$$(\mathrm{P}') \quad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) \\ f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) & f_4(z) \end{vmatrix},$$

(*) On peut arriver à la même valeur en remarquant que la relation entre le point V et le plan XYZ peut s'exprimer par les équations $\Sigma \nu_1 f_1(x) = 0$, $\Sigma \nu_1 f_1(y) = 0$, $\Sigma \nu_1 f_1(z) = 0$, d'où l'on peut tirer $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$.

divisés par $8\lambda H$. La quantité $\Sigma \nu_1 p_1$ peut donc se déduire du produit de deux systèmes d'éléments (P) et (P′), ce qui donne enfin

$$(10) \quad \pi = -\frac{f(\beta)}{H(p_1^2+p_2^2+p_3^2)} \begin{vmatrix} F(xx) & F(xy) & F(xz) \\ F(yx) & F(yy) & F(yz) \\ F(zx) & F(zy) & F(zz) \end{vmatrix}.$$

Observons que $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = 4\,\overline{XYZ}^2$, et qu'en supposant les trois points X, Y, Z conjugués, ou

$$F(xy) = F(yz) = F(zx) = 0,$$

on retrouve la formule (8).

Si l'on avait remplacé directement, dans la valeur (9), p_1, p_2, p_3 et p_4 par les mineurs du système P, on aurait trouvé

$$\left(H \begin{matrix} p \\ p \end{matrix}\right) = -\Sigma B_{rs} p_r p_s = -\left(H' \begin{matrix} x & y & z \\ x & y & z \end{matrix}\right);$$

d'où l'on pourrait également déduire la formule (10).

8. Les faisceaux de droites et de trièdres en involution jouissent de propriétés analogues à celles des deux involutions rectiligne et plane.

Reprenons les figures et les notations du n° 6. Les points M_2 et M_3 se déplaçant sur la polaire de M_1, les droites M_1M_2 et M_1M_3 forment les rayons conjugués d'un faisceau en involution autour de M_1. Or l'on a

$$\mu_{12} = -\frac{\mu_1\mu_2}{\overline{M_1M_2}^2}, \quad \mu_{13} = -\frac{\mu_1\mu_3}{\overline{M_1M_3}^2};$$

d'où

$$\mu_{12}.\mu_{13} = \mu_1 \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\overline{M_1M_2}^2 . \overline{M_1M_3}^2},$$

et, comme $M_1M_2 \times M_1M_3 = \dfrac{2T}{\sin(M_2M_1M_3)}$, $\dfrac{\mu_1\mu_2\mu_3}{4T^2} = -\dfrac{1}{A^2B^2}$,

on trouve cette première formule

$$(11)\qquad \frac{\mu_{12}\mu_{13}}{\sin^2(M_2M_1M_3)} = -\frac{\mu_1}{A^2B^2}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\overline{M_1M_2}^2}{\mu_2} + \frac{\overline{M_1M_3}^2}{\mu_3}\right)$$
$$= \frac{\alpha^2}{\mu_1}\left(\frac{\overline{M_1M_2}^2}{M_2M_3.M_2M_4} + \frac{\overline{M_1M_3}^2}{M_3M_2.M_3M_4}\right).$$

La dernière parenthèse, d'après un théorème connu (*), est égale à $1 - \frac{\overline{M_1M_4}^2}{M_4M_2.M_4M_3}$, et, comme le produit $M_4M_2.M_4M_3$ est constant, on a aussi

$$(11')\qquad \frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \text{const.}$$

Les relations (11) et (11′) peuvent être considérées comme constituant les formules fondamentales des indices des rayons conjugués des faisceaux en involution.

La droite M_1M_4 et la parallèle menée par M_1 à M_2M_3 sont deux rayons conjugués du faisceau ; l'indice de la première droite est $\frac{1}{\beta^2}$, et celui de l'autre $-\frac{\mu_1}{\alpha^2}$. Par suite, en vertu de l'égalité (11′),

$$\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \beta^2 - \frac{\alpha^2}{\mu_1},$$

et, à cause de $\frac{1}{\mu_1} = -1 - \frac{1}{\mu_4}$, $\mu_{23} = -\frac{\mu_4}{\alpha^2}$,

$$\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{13}} = \beta^2 + \alpha^2 - \frac{1}{\mu_{23}},$$

(*) Théorème de Stewart. Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1859, p. 184 et 208.

ou

(12) $$\alpha^2+\beta^2=A^2+B^2=\frac{1}{\mu_{12}}+\frac{1}{\mu_{13}}+\frac{1}{\mu_{23}}.$$

Soient λ_{12}, λ_{23}, λ_{31} les caractéristiques des droites; comme $\mu_{rs}=-\frac{\lambda_{rs}}{A^2B^2}$, on a encore

(12') $$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=-\left(\frac{1}{\lambda_{12}}+\frac{1}{\lambda_{23}}+\frac{1}{\lambda_{31}}\right).$$

Les égalités (12) et (12') résolvent la question 919, n°s 1 et 2, appliquée aux coniques (*).

Transportons le résultat (12) aux surfaces. Comme $I_{12}=\mu_{12}\times I_5^2,\ldots,\quad -I_5=\frac{D^2}{A^2}=\frac{D'^2}{B^2}=\frac{D^2+D'^2}{A^2+B^2}$, nous aurons

(13) $$-\frac{A^2+B^2}{I_5}=\frac{1}{I_{12}}+\frac{1}{I_{23}}+\frac{1}{I_{31}}.$$

9. En supposant les points M_1, M_2, M_3 mobiles dans le plan polaire de M_4, et constamment conjugués avec la surface, on obtient un faisceau de trièdres (ou de triples droites) en involution jouissant de propriétés analogues

---

(*) En se servant à peu près des mêmes principes que nous, M. de Joncquières a résolu (t. XX, p. 25) la question 534, qui constitue une nouvelle analogie entre les deux involutions rectiligne et plane. *De même que, dans l'involution rectiligne, le point central est un centre radical commun de tous les cercles passant par deux points conjugués, de même dans l'involution plane le point central est un centre radical commun de tous les cercles passant par trois points conjugués.*

Dans l'équation $\frac{1}{\lambda_{12}}+\frac{1}{\lambda_{23}}+\frac{1}{\lambda_{31}}=0$, on peut reconnaître l'équation en coordonnées trilinéaires du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$. Car, si (h_1, h_2, h_3) sont les hauteurs de ce triangle, (a_1, a_2, a_3) les longueurs des côtés et $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ les distances de O à ces côtés, on a

$$\lambda_{12}=-\delta_3 h_3=-\frac{2\delta_3 T}{a_3},$$

etc.

celles des trois involutions précédemment considérées.
n effet

$$I_{41} = -\frac{I_4 I_1}{\overline{M_4 M_1}^2}, \quad I_{42} = -\frac{I_4 I_2}{\overline{M_4 M_2}^2}, \quad I_{43} = -\frac{I_4 I_3}{\overline{M_4 M_3}^2},$$

'où

$$I_{41} . I_{42} . I_{43} = - I_4^2 \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{\overline{M_4 M_1}^2 . \overline{M_4 M_2}^2 . \overline{M_4 M_3}^2}.$$

ais $V = \frac{1}{6} M_4 M_1 . M_4 M_2 . M_4 M_3 . \sin(\text{angle solide } M_4)$,
$\frac{[_2 I_3 I_4}{6V^2} = - a^2 b^2 c^2$; par conséquent

$$\frac{I_{41} I_{42} I_{43}}{\sin^2(\text{angle solide } M_4)} = \frac{I_4^2}{a^2 b^2 c^2} = \text{const.}$$

Désignons de nouveau par M_6 et M_7 les points cen-
ıux de $M_1 M_2$ et $M_3 M_4$, et par $D_{r,s}$ le diamètre parallèle
$M_r M_s$. Les droites $M_4 M_3$ et $M_4 M_6$, $M_4 M_5$ et la pa-
llèle à $M_3 M_6$ par M_4, font partie d'un faisceau de
oites en involution; donc, d'après l'égalité (11'), qui
t également applicable aux indices I,

$$\frac{1}{I_{43}} + \frac{1}{I_{46}} = \frac{1}{I_{45}} - \frac{D_{36}^2}{I_4}.$$

: même, les droites $M_4 M_1$ et $M_4 M_2$, $M_4 M_6$ et la pa-
llèle à $M_1 M_2$ par M_4 appartiennent à un faisceau en
volution et donnent, par conséquent,

$$\frac{1}{I_{41}} + \frac{1}{I_{42}} = \frac{1}{I_{46}} - \frac{D_{12}^2}{I_4}.$$

ı ajoutant ces égalités, on a

$$\frac{1}{I_{41}} + \frac{1}{I_{42}} + \frac{1}{I_{43}} = \frac{1}{I_{45}} - \frac{1}{I_4}(D_{36}^2 + D_{12}^2);$$

mme D_{36} et D_{12} sont deux diamètres conjugués de la
:tion centrale parallèle au plan $M_1 M_2 M_3$ et que la

somme de leurs carrés est constante, on retrouve la seconde propriété générale des involutions.

Si l'on remplace dans l'égalité précédente $\frac{1}{I_{45}}$ par D_{45}^2, $\frac{1}{I_4}$ par $-1-\frac{1}{I_5}$, et ensuite $\frac{D_{36}^2+D_{12}^2}{I_5}$ par $-\left(\frac{1}{I_{12}}+\frac{1}{I_{23}}+\frac{1}{I_{31}}\right)$(*), il vient

$$D_{45}^2+D_{36}^2+D_{12}^2=a^2+b^2+c^2=\sum_{1234}\frac{1}{I_{rs}},$$

ce qui démontre la question 919, n° 1.

10. Soient D et D' deux droites polaires réciproques par rapport à une surface du second ordre f, M_6 et M_7 leurs points centraux, M_1 et M_2 deux points conjugués quelconques de D, M_3 et M_4 deux points conjugués quelconques de D'. Les plans DM_3 et DM_4 forment une involution autour de D, de même que $D'M_1$ et $D'M_2$ autour de D'. Le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est conjugué par rapport à f. Soient (T_1, T_2, T_3, T_4) les aires de ses faces et $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ leurs indices; nous aurons

$$\pi_4=-a^2b^2c^2\frac{I_1I_2I_3}{4T_4^2},$$

$$\pi_3=-a^2b^2c^2\frac{I_1I_2I_4}{4T_3^2};$$

d'où

$$\pi_3\pi_4=a^4b^4c^4\times I_1I_2\frac{I_1I_2I_3I_4}{16T_3^2T_4^2}.$$

Mais $V=\frac{2}{3}\times\frac{T_3T_4\sin(T_3,T_4)}{M_1M_2}$, $\frac{I_1I_2I_3I_4}{36V^2}=-a^2b^2c^2$; par suite

$$\frac{\pi_3\pi_4}{\sin^2(T_3,T_4)}=-a^2b^2c^2\times I_{12}=\text{const.}$$

(*) En vertu de la relation (13).

De là on conclut une valeur de I_{12} qui s'accorde avec celle de I_{pq} donnée ci-dessus, lorsqu'on suppose les plans P et Q conjugués ou $\left(H\,{p \atop q}\right) = 0$.

On a aussi

$$\frac{1}{\pi_4} + \frac{1}{\pi_3} = \frac{-1}{a^2b^2c^2 \times I_1 I_2}\left(\frac{4T_4^2}{I_3} + \frac{4T_3^2}{I_4}\right).$$

Soient N_3, N_4, N_7 les projections orthogonales M_3, M_4, M_7 sur un plan perpendiculaire à M_1M_2 en un point quelconque G; on peut écrire

$$2T_4 = M_1M_2 \times GN_3, \quad 2T_3 = M_1M_2 \times GN_4,$$
$$I_3 = \frac{M_3M_4 \times M_3M_7}{D_{34}^2} = \frac{N_3N_4 . N_3N_7}{D_{34}^2 \sin^2(D, D')},$$
$$I_4 = \frac{N_4N_3 . N_4N_7}{D_{34}^2 \sin^2(D, D')},$$

$2D_{34}$ étant la longueur du diamètre parallèle à M_3M_4. La somme $\frac{1}{\pi_3} + \frac{1}{\pi_4}$ peut donc prendre la forme

$$\frac{D_{34}^2 \sin^2(D, D')}{a^2b^2c^2 \times I_{12}}\left(\frac{\overline{GN}_3^2}{N_3N_4 \times N_3N_7} + \frac{\overline{GN}_4^2}{N_4N_3 \times N_4N_7}\right),$$

ou, en vertu du *théorème de Stewart,* la forme

$$\frac{D_{34}^2 \sin^2(D, D')}{a^2b^2c^3 \times I_{12}}\left(1 - \frac{\overline{GN}_7^2}{N_7N_3 \times N_7N_4}\right),$$

et, comme le produit $N_7N_3 \times N_7N_4$ reste constant lorsque les points M_3 et M_4 se déplacent sur D', on a

$$(14) \qquad \frac{1}{\pi_3} + \frac{1}{\pi_4} = \text{const.}$$

Les faisceaux de plans en involution jouissent donc des propriétés analogues à celles des autres involutions.

La relation exprimée par (14) va nous conduire au théorème 919, n° 2. Mais, avant d'exposer la démonstration, nous ferons observer que l'indice d'un plan peut encore s'exprimer par *moins* l'indice de son point central, multiplié par le carré de la distance du centre de la surface au plan tangent parallèle; car M_5 étant le point central du plan $M_1 M_2 M_3$, et α l'angle de ce plan avec la droite $OM_4 M_5$, on a

$$\pi_4 = - M_4 M_5 \times OM_5 \sin^2\alpha, \quad I_5 = \frac{M_5 M_4 . M_5 O}{D^2_{45}};$$

d'où

$$\pi_4 = - I_5 \times D^2_{45} \sin^2\alpha.$$

Si le plan passe par le centre de la surface, dont l'indice vaut -1, son indice est égal au carré de la distance du centre au plan tangent parallèle.

Soient maintenant $2A$, $2B$, $2C$ les longueurs des diamètres de la surface suivant les trois directions $M_1 M_2$, $M_3 M_4$, $M_6 M_7$; ces diamètres forment un système de *diamètres conjugués*. Menons par D et par D' des plans parallèles au plan AB; soient π_δ et $\pi_{\delta'}$ leurs indices. Désignons aussi par π_6 et π_7 les indices des plans $M_3 M_4 M_6$, $M_1 M_2 M_7$, et par (A, BC) l'inclinaison de la droite A sur le plan des droites B, C. En vertu de la relation (14), on peut écrire

$$\frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{\pi_{\delta'}} + \frac{1}{\pi_6}, \quad \frac{1}{\pi_3} + \frac{1}{\pi_4} = \frac{1}{\pi_\delta} + \frac{1}{\pi_7}.$$

Mais

$$\pi_{\delta'} = - I_7 \times C^2 \sin^2(C, AB), \quad \pi_\delta = - I_6 \times C^2 \sin^2(C, AB),$$

$$\pi_6 = B^2 \sin^2(B, AC), \quad \pi_7 = A^2 \sin^2(A, BC),$$

$$\frac{1}{I_6} + \frac{1}{I_7} = -1;$$

ɔar conséquent

$$\frac{1}{\pi_1}+\frac{1}{\pi_2}+\frac{1}{\pi_3}+\frac{1}{\pi_4}=\sum\frac{1}{A^2\sin^2(A, BC)}.$$

ʟe second membre de cette égalité est égal à la somme les carrés des inverses des demi-axes; donc, etc.

La quantité $\sum\frac{1}{\pi_1}$ est susceptible d'une transformation ont nous déduirons une proposition intéressante qui, royons-nous, n'a pas encore été remarquée. Soient en ffet δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 les distances du centre aux faces du étraèdre conjugué; nous aurons

$$\sum\frac{1}{\pi_1}=-\sum\frac{1}{\delta_1 h_1}=-\frac{1}{3V}\sum\frac{T_1}{\delta_1}.$$

En désignant par M'_1, M'_2,... les angles solides po-aires des trièdres M_1, M_2,... du tétraèdre, un théorème onnu donne

$$V^2=\frac{2}{9}T_2T_3T_4\sin M'_1;$$

'où

$$\frac{9V^2}{2T_1T_2T_3T_4}=\frac{\sin M'_1}{T_1}=\frac{\sin M'_2}{T_2}=\ldots$$

ɩemplaçons dans l'égalité ci-dessus T_1, T_2,... par les uantités proportionnelles $\sin M'_1$, $\sin M'_2$,..., et il vient

$$\sum\frac{1}{a^2}=-\frac{2T_1T_2T_3T_4}{27V^3}\sum\frac{\sin M'_1}{\delta_1}$$

$$=-\frac{2T_1T_2T_3T_4}{27V^3\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4}\Sigma\,\delta_2\delta_3\delta_4\sin M'_1.$$

ɔr $\frac{1}{6}\delta_2\delta_3\delta_4\sin M'_1$ est le volume du tétraèdre qui a pour rêtes δ_2, δ_3, δ_4,...; donc $\frac{1}{6}\Sigma\,\delta_2\delta_3\delta_4\sin M'_1$ est le volume u tétraèdre qui a pour sommets les projections du centre e la surface sur les faces du tétraèdre. Soit V' ce volume;

nous pouvons écrire

$$\sum \frac{1}{a^2} = -\frac{4}{9} \frac{T_1 T_2 T_3 T_4}{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4} \frac{V'}{V^3}.$$

Si maintenant $\sum \frac{1}{a^2} = 0$, on doit avoir $V' = 0$; on en conclut que : *Dans tout hyperboloïde dans lequel* $\sum \frac{1}{a^2} = 0$, *les projections du centre de la surface sur les faces d'un tétraèdre conjugué quelconque sont dans un même plan.* Cette proposition peut être considérée comme l'analogue de la suivante : *Dans toute hyperbole équilatère, la circonférence circonscrite à un triangle conjugué passe par le centre.*

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Depuis quelques années l'étude des surfaces de degré supérieur au second a pris une extension considérable; il suffit, pour s'en convaincre, de lire le remarquable Rapport de M. Bertrand sur les progrès des Sciences mathématiques, dont un extrait a été publié dans les *Nouvelles Annales*, 1868. Ce Rapport signale les beaux travaux de Cayley sur la surface des ondes, de Kummer sur une classification des surfaces du quatrième ordre, de MM. Moutard et Darboux sur quelques surfaces de cet ordre, jouissant de propriétés très-intéressantes, et enfin les études de M. de la Gournerie et de M. Chasles sur la développable circonscrite à deux surfaces du second

ordre et sur la *quadrispinale*. (*Voir* les *Nouvelles Annales.*)

Je me propose, dans cette Note, d'étudier les surfaces du quatrième ordre d'une manière générale, en les considérant comme lieux des intersections successives des surfaces correspondantes de deux faisceaux de surfaces du second degré liées par une relation homographique. C'est de cette manière que M. Chasles a considéré la génération des courbes du quatrième et du troisième ordre dans un travail qui fait partie du tome XXXVII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. On voit ainsi avec une grande facilité comment les diverses particularités que présentent les surfaces du quatrième ordre se rattachent à des particularités analogues des surfaces génératrices. Je fais un grand usage des notations abrégées qui indiquent si simplement les propriétés des surfaces dont elles servent à former les équations. Le mode de génération des surfaces du quatrième ordre donne, comme cas particulier, celle des surfaces du troisième ordre.

Je donne un peu plus de développement au cas remarquable où les deux faisceaux de surfaces du second ordre sont composés de surfaces homothétiques, et en particulier à celui où l'on a deux faisceaux de sphères. On retrouve alors les belles propriétés des surfaces *anallagmatiques* étudiées par MM. Moutard et Darboux, surfaces dont le *tore* et la *cyclide* sont des cas particuliers.

Je rattache aussi la *surface des ondes* à ce mode de génération.

I. — *Définition des surfaces du quatrième ordre.*

(Comme le mot de *surfaces du second ordre* va revenir à chaque instant, je me servirai, pour désigner ces

surfaces, d'un nom qui leur a été donné par Cayley, je crois, celui de *quadriques*. Il n'est pas encore aussi couramment employé que celui de *coniques*, donné aux courbes du second ordre; mais, puisqu'il est créé, je ne vois pas pourquoi on ne s'en servirait pas pour abréger le discours.)

Soient

$$S = 0, \quad S_1 = 0$$

les équations de deux *quadriques*; l'équation

$$(1) \qquad S - \lambda S_1 = 0,$$

dans laquelle λ est un paramètre variable, représente un faisceau de *quadriques* passant toutes par les points communs aux deux surfaces S, S_1.

De même

$$(2) \qquad \Sigma - \mu \Sigma_1 = 0$$

est l'équation d'un second faisceau de *quadriques* passant par les points communs aux surfaces Σ, Σ_1.

Ceci posé, si l'on suppose les deux paramètres λ, μ liés par la relation de l'homographie

$$(3) \qquad A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

à chaque surface du premier faisceau en correspond une, et une seule, du second.

Si l'on élimine λ, μ entre les équations (1), (2), (3), l'équation résultante

$$(4) \qquad AS\Sigma + BS\Sigma_1 + CS_1\Sigma + DS_1\Sigma_1 = 0$$

représente une surface du quatrième ordre passant par les courbes (S, S_1), (Σ, Σ_1) communes aux *quadriques* des deux faisceaux, courbes que nous appellerons les *bases* des faisceaux.

On a donc ainsi l'énoncé suivant :

Théorème I. — *Si l'on a deux faisceaux homographiques de quadriques, le lieu des points d'intersection des quadriques correspondantes sera une surface du quatrième ordre passant par les bases des deux faisceaux.*

2. La relation entre les paramètres λ, μ peut se simplifier; il y a surtout deux formes à remarquer. Cela dépend au surplus de la manière d'établir la correspondance entre les deux faisceaux. Quand on connaît trois couples de surfaces correspondantes, les constantes de la relation (3) sont connues. Supposons, par exemple, que les surfaces S et Σ se correspondent, ainsi que S_1, Σ_1 : cela exige que λ et μ soient nuls ou infinis à la fois, et par conséquent que les coefficients A et C soient nuls; la relation (3) simplifiée prend la forme

$$\lambda + k\mu = 0.$$

Si, au contraire, ce sont les surfaces S, Σ_1, et Σ, S_1 qui se correspondent, alors à la valeur infinie de μ doit correspondre la valeur nulle de λ; on a

$$\lambda\mu + k = 0.$$

De là les deux formes suivantes de l'équation du quatrième ordre

(5) $$S\Sigma_1 + k\Sigma S_1 = 0,$$
(6) $$S\Sigma + k\Sigma_1 S_1 = 0.$$

3. L'une ou l'autre de ces formes met en évidence l'existence d'un double mode de génération de la surface du quatrième ordre.

Prenons la forme (5), par exemple : on peut considérer la surface qu'elle représente comme le lieu des courbes

(7) $$\left\{\begin{array}{l} S - \lambda S_1 = 0, \\ \Sigma - \mu\Sigma_1 = 0 \end{array}\right.$$

avec

$$\lambda + k\mu = 0,$$

ou bien comme le lieu des courbes

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S - \lambda' \Sigma = 0, \\ \Sigma_1 - \mu' S_1 = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$\lambda' \mu' + k = 0.$$

On peut reconnaître aisément que deux courbes gauches du même système n'ont pas en général de points communs. Soient, en effet, deux courbes du système (7)

$$\left\{ \begin{array}{l} S - \lambda S_1 = 0, \\ \Sigma - \mu \Sigma_1 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} S - \lambda_1 S_1 = 0, \\ \Sigma - \mu_1 \Sigma_1 = 0. \end{array} \right.$$

Pour toute solution commune à ces quatre équations, on doit avoir

$$(\lambda_1 - \lambda) S_1 = 0$$

ou

$$(\mu_1 - \mu) \Sigma_1 = 0.$$

Or, à moins que le point commun ne soit sur les surfaces S_1, Σ_1, on doit avoir $\lambda_1 = \lambda$ ou $\mu_1 = \mu$, ce qui est la même chose, car la première condition entraîne la seconde. (*Voir* la Note I.)

Toute courbe du premier système coupe les courbes du second, ce qu'on vérifiera très-facilement.

4. Les équations du quatrième degré que nous avons obtenues sont-elles générales? Peut-on les identifier avec celle d'une surface quelconque du même ordre? D'après le nombre des constantes contenues dans les diverses fonctions S et Σ, il semble qu'on peut répondre affirmativement; il faut, en effet, trente-quatre conditions simples pour déterminer une surface du quatrième ordre;

or les quatre fonctions du second degré renferment chacune neuf arbitraires; il y a en outre des coefficients de liaison : l'identification paraît possible. Mais il est difficile de savoir si toutes les constantes sont indépendantes.

Dans le travail relatif aux courbes du quatrième ordre, M. Chasles a démontré qne toute courbe du quatrième degré pouvait être engendrée par les intersections de deux faisceaux homographiques de coniques; mais il n'est pas facile d'appliquer une démonstration de ce genre à la génération des surfaces de même ordre.

Il y a aussi une lacune regrettable dans la théorie des surfaces du quatrième ordre. M. Chasles, remarquant la relation très-simple qui lie un point variable d'une conique à quatre points fixes de cette même courbe (*), en a conclu sans peine que : *Si l'on joint le point d'intersection de deux coniques correspondantes des faisceaux ayant pour bases deux systèmes de quatre points* (a, b, c, d), (a', b', c', d') *à ces deux systèmes de points, les deux faisceaux de quatre droites ainsi formés ont entre leurs rapports anharmoniques une relation linéaire par rapport à chacun d'eux.*

Et réciproquement, *le lieu des points jouissant de cette propriété est une courbe du quatrième ordre qui passe par les huit points* a, b, c, d, a', b', c', d'.

Or il est évident qu'à cette propriété des coniques doit correspondre une relation entre les droites joignant un point quelconque d'une surface du second degré aux huit points fixes situés sur une courbe gauche du quatrième ordre et servant de bases aux faisceaux de quadriques que nous considérons. Cette relation doit être sans doute assez compliquée. Il me paraît donc assez difficile de

(*) Si l'on joint un point quelconque d'une conique à quatre points fixes pris sur cette conique, le rapport anharmonique du faisceau est constant.

substituer à la définition des surfaces du quatrième ordre une propriété géométrique convenant à tous ses points.

Cependant, en remarquant que le résultat de la substitution des coordonnées d'un point quelconque dans le premier membre de l'équation d'une *quadrique* représente le rapport des distances du point et du centre de la surface (dans le cas des surfaces à centre) au plan polaire du point, on peut écrire l'équation générale des surfaces du quatrième degré, trouvée précédemment, sous la forme

$$A\frac{d}{d_0}\frac{\delta}{\delta_0}+B\frac{d}{d_0}\frac{\delta_1}{\delta_{1,0}}+C\frac{d_1}{d_{1,0}}\frac{\delta}{\delta_0}+D\frac{d_1}{d_{1,0}}\frac{\delta_1}{\delta_{1,0}}=0,$$

les d et δ désignant les distances d'un point de la surface aux plans polaires relatifs aux quadriques S, Σ, et les mêmes lettres, affectées de l'indice zéro, se rapportant aux distances des centres aux mêmes plans (*).

5. Il y a encore une propriété géométrique des courbes d'intersection des quadriques correspondantes des deux faisceaux, qui me paraît digne d'être remarquée. On sait que tous les plans polaires d'un point (x, y, z) par rapport aux quadriques du faisceau (S, S_1) passent par une même droite D; de même, tous les plans polaires du même point par rapport aux quadriques du faisceau (Σ, Σ_1) passent par une même droite Δ; d'où il suit que la tangente au point (x, y, z) à la courbe d'intersection des deux quadriques correspondantes passant par ce point est l'intersection des deux plans menés par ce point et par

(*) Ce travail était complétement terminé, lorsqu'en parcourant les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, j'ai trouvé dans le tome XLV, page 1066, une nouvelle Note de M. Chasles, relative à la génération des courbes et surfaces de degré *m*. Le double mode de génération de la surface du quatrième ordre, dont il est question au n° 3 de ce paragraphe, n'est qu'un cas particulier du théorème énoncé par l'illustre géomètre (*Loc. cit.*).

les droites D et Δ. C'est d'ailleurs ce qui résulte immédiatement des équations des deux faisceaux.

Je vais maintenant examiner les principales modifications que subit l'équation générale des surfaces du quatrième ordre lorsque les quadriques des deux faisceaux prennent elles-mêmes quelque propriété particulière. Nous rencontrerons ainsi fréquemment des surfaces du troisième ordre comme cas particuliers.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 853

(voir 2e série, t. VII, p. 138);

PAR M. E. PELLET.

Trouver la somme des séries suivantes :

(1) 1°
$$\sum \frac{\varphi(n)}{1.2.3\ldots n},$$

dans laquelle $\varphi(n)$ *est un polynôme du degré* p;

(2) 2°
$$\sum \frac{\varphi(n)}{f(n)},$$

où l'on a

$$f(n) = (n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p)$$

et où $\varphi(n)$ *est un polynôme au plus du degré* $(p-1)$.

(DARBOUX.)

Les deux séries (1) et (2) sont convergentes.

En effet, dans la première, le rapport d'un terme au

précédent, $\frac{\varphi(n+1)}{(n+1)\varphi(n)}$, est nul pour $n=\infty$. Dans la seconde, ce rapport est $\frac{f(n)\varphi(n+1)}{f(n+1)\varphi(n)}$.

Soit

$$\varphi(n) = A_0 n^{\mu} + A_1 n^{\mu-1} + \ldots .$$

Le rapport précédent devient

$$\frac{A_0 n^{p+\mu+1} + \left[A_0(p+1)\left(a+\frac{p}{2}\right) + A_1 + A_0\mu\right] n^{p+\mu} + \ldots}{A_0 n^{p+\mu+1} + \left[A_0(p+1)\left(a+1+\frac{p}{2}\right) + A_1\right] n^{p+\mu} + \ldots}.$$

La quantité

$$(p+1)\left(a+\frac{p}{2}\right) + \frac{A_1}{A_0} + \mu - (p+1)\left(a+1+\frac{p}{2}\right) - \frac{A_1}{A_0} + 1,$$

ou

$$\mu - p,$$

étant négative, puisque μ est au plus égal à $p-1$, la série (2) est convergente. On voit, en outre, que la convergence de ces séries est indépendante du signe des termes, qu'on peut grouper dès lors d'une manière quelconque.

Limite de la première série. On a

$$\varphi(n) = \varphi(0) + \frac{n}{1}\frac{\Delta\varphi(0)}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2\varphi(0) + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{1.2.3\ldots p}\Delta^p\varphi(0),$$

$\Delta^{\mu}\varphi(0)$ étant la différence du $\mu^{ième}$ ordre de la première des quantités

$$\varphi(0),\quad \varphi(1),\quad \varphi(2),\ldots,\quad \varphi(p).$$

Par conséquent,

$$\sum \frac{\varphi(n)}{1.2.3\ldots n} = e\left[\varphi(0) + \frac{\Delta\varphi(0)}{1} + \frac{\Delta^2\varphi(0)}{1.2} + \frac{\Delta^3\varphi(0)}{1.2.3} + \ldots + \frac{\Delta^p\varphi(0)}{1.2.3\ldots p}\right],$$

e étant la base des logarithmes népériens. Cette formule suppose que $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ est égal à 1 pour $n = 0$.

Limite de la deuxième série. On a

$$\varphi(n) = \varphi(-a) + \frac{n+a}{1}\,\frac{\Delta\varphi(-a)}{-1} + \frac{(n+a)(n+a+1)}{1.2}\,\frac{\Delta^2\varphi(-a)}{(-1)^2} + \ldots + \frac{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p-2)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{\Delta^{p-1}\varphi(-a)}{(-1)^{p-1}},$$

$\Delta^\mu\varphi(-a)$ étant la différence du $\mu^{ième}$ ordre de la première des quantités

$$\varphi(-a),\quad \varphi(-a-1),\ldots,\quad \varphi(-a-p+1).$$

Par conséquent,

$$\sum \frac{\varphi(n)}{f(n)} = \frac{\varphi(-a)}{1}\,\frac{1}{p}\,\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+p-1)} - \frac{\Delta\varphi(-a)}{1}\,\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+p-1)} + \frac{\Delta^2\varphi(-a)}{1.2}\,\frac{1}{p-2}\,\frac{1}{(a+2)\ldots(a+p-1)} - \ldots\ldots (-1)^{p-1}\frac{\Delta^{p-1}\varphi(-a)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{1}{p-p+1}\,\frac{1}{a+p-1}.$$

Question 869

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 237);

PAR M. E. PELLET,

Si l'on pose

$$f_m(x) = 1 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 x^2 + \ldots$$
$$+ \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\right]^2 x^n + \ldots + x^m,$$

1° *Les équations*

$$f_1(x) = 0,\quad f_2(x) = 0, \ldots,\quad f_m(x) = 0$$

auront toutes leurs racines réelles et inégales;

2° *Les racines de l'équation* $f_m(x) = 0$ *sépareront les racines de l'équation* $f_{m+1}(x) = 0$.

(H. LAURENT.)

En rendant homogène le polynôme $f_m(x)$, on a

$$f_m(x, t) = \sum \left(\frac{P_m}{P_m P_{m-n}}\right)^2 x^n t^{m-n}.$$

En posant

$$P_m = 1.2.3\ldots m,$$

on en déduit

$$x\frac{df_m}{dx} = \sum n \left(\frac{P_m}{P_n P_{m-n}}\right)^2 x^n t^{m-n},$$

$$x^2\frac{d^2 f_m}{dx^2} + x\frac{df_m}{dx} = \sum n^2 \left(\frac{P_m}{P_n P_{m-n}}\right)^2 x_n t^{m-n}$$
$$= m^2 x \sum \left(\frac{P_{m-1}}{P_{n-1} P_{m-n}}\right)^2 x^{n-1} t^{m-n} = m^2 x f_{m-1},$$

et, en remplaçant les différentiations par rapport à x par les différentiations relatives à t,

$$t^2\frac{d^2 f_m}{dt^2} + t\frac{df_m}{dt} = m^2 t f_{m-1},$$

et en ajoutant membre à membre

$$(1)\quad x^2\frac{d^2f_m}{dx^2}+t^2\frac{d^2f_m}{dt^2}+x\frac{df_m}{dx}+t\frac{df_m}{dt}=m^2f_{m-1}(x+t).$$

Posons

$$xt\frac{d^2f_m}{dt\,dx}=\varphi;$$

on a

$$\varphi=\sum n(m-n)\left(\frac{P_m}{P_n P_{m-n}}\right)^2 x^n t^{m-n};$$

d'où

$$x\frac{d\varphi}{dx}=x\sum n^2(m-n)\left(\frac{P_m}{P_n P_{m-n}}\right)^2 x^{n-1}t^{m-n}$$

$$=m^2xt\sum(m-n)\left(\frac{P_{m-1}}{P_{n-1}P_{m-n}}\right)^2 x^{n-1}t^{m-1-n}=m^2xt\frac{df_{m-1}}{dt};$$

de même

$$t\frac{d\varphi}{dt}=m^2xt\frac{df_{m-1}}{dx};$$

d'où

$$(2)\qquad 2\left(x\frac{d\varphi}{dx}+t\frac{d\varphi}{dt}\right)=2m\varphi=2m^2xt\frac{df_{m-1}}{dx}.$$

Ajoutant les relations (1) et (2), après avoir divisé la seconde par m, et remarquant qu'on a

$$x\frac{df_m}{dx}+t\frac{df_m}{dt}=mf_m,$$

$$x^2\frac{d^2f_m}{dx^2}+2xt\frac{d^2f_m}{dx\,dt}+t^2\frac{d^2f_m}{dt^2}=m(m-1)f_m,$$

il vient

$$m^2f_m=m^2f_{m-1}(x+t)+2mxt\left(\frac{df_{m-1}}{dx}+\frac{df_{m-1}}{dt}\right),$$

ou, en remplaçant t par 1 et $\frac{df_{m-1}}{dt}$ par $f_{m-1}-xf'_{m-1}$,

$$(3)\qquad f_m=\frac{(3m-2)x+m}{m}f_{m-1}+\frac{2x}{m}(1-x)f'_{m-1}.$$

Le théorème se vérifie aisément pour m égal à 1, 2, 3,.... Pour le démontrer dans sa généralité, il suffit de prouver que, s'il a lieu pour une valeur de m, il a lieu par cela même pour la valeur de m immédiatement supérieure.

Supposons que l'équation $f_{m-1} = 0$ ait toutes ses racines réelles et inégales, et soient a_μ et $a_{\mu+1}$ deux racines consécutives de cette équation; elles réduisent f_m à $\frac{2x(1-x)}{m} f'_{m-1}$. Les quantités a_μ et $a_{\mu+1}$ sont négatives, puisque f_{m-1} n'offre pas de variations; elles donnent, par conséquent, le même signe au facteur $\frac{2x(1-x)}{m}$; mais f'_{m-1} prend des valeurs de signe contraire. Par conséquent, les nombres a_μ, $a_{\mu+1}$ comprennent au moins une racine de f_m. En appliquant ce raisonnement à tous les intervalles des racines de $f_{m-1} = 0$, on voit que les racines de $f_m = 0$ sont séparées par les nombres

$$-\infty \quad a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \quad 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ étant les racines de f_{m-1} rangées suivant leur ordre de grandeur.

Remarque. — Si dans la relation (3) on fait $x = 1$, elle devient

$$1 + \left(\frac{m^2}{1}\right)^2 + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 + \ldots = \frac{2(2m-1)}{m}\left[1 + \left(\frac{m-1}{1}\right)^2 + \ldots\right]$$

On en déduit

$$1 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 + \ldots = \frac{1.2.3\ldots(2m-1)2m}{[1.2.3\ldots(m-1)m]^2}.$$

Note. — Cette question a été résolue aussi par M. H. Brocard, lieutenant du Génie.

Question 874

(voir 2e série, t. VII, p. 232);

PAR M. F.-P. POURCHEIROUX.

On donne un cercle et deux points, inscrire dans le cercle un triangle isoscèle dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés. (LEMAIRE.)

Soient O le cercle donné et M et N les deux points; soit ABC le triangle cherché (*). Je construis les polaires PD et PE de M et de N. Les pôles de AB et AC seront sur des perpendiculaires à ces droites menées du centre du cercle O; de plus, ils doivent se trouver respectivement sur PD et PE; D et E sont donc les pôles de AB et AC.

Cela posé, le point A étant sur AB et sur AC, sa polaire, qui est la tangente en ce point, doit passer par les pôles D et E de AB et de AC. Pour construire le triangle isoscèle, il suffira donc de construire les polaires de M et de N et de mener au cercle O une tangente telle, que le point de contact soit le milieu de la partie comprise entre les deux polaires. Ce point de contact A sera le sommet du triangle cherché.

La question 874 se trouve donc ramenée au problème suivant :

Mener entre deux droites une tangente à un cercle, de telle manière qu'elle soit partagée en deux parties égales par le point de contact.

Ce dernier problème a été résolu complétement par M. Morel (*voir* 2e série, t. VIII, p. 242).

Note. — La même question a été résolue par M. H. Brocard.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 991

(voir 2e série, t. IX, p. 240);

PAR M. C. CLAVENAD,
Élève au collége Chaptal.

Deux divisions homographiques se trouvent sur la même droite. Au point a de la première division correspond le point b de la seconde; au point b, pris dans la première division, correspond le point c de la seconde; au point c de la première division correspond le point d de la seconde, et ainsi de suite. On obtient ainsi une série indéfinie de points a, b, c, d,.... Prouver que ces points se rapprochent indéfiniment d'un des points doubles des divisions homographiques, ces points doubles étant supposés réels. (ÉMILE WEYR.)

1re *Solution.* — Je suppose que e et f (*) soient les deux points doubles et que je relève l'une des divisions suivant la droite ek, ek étant égal à ef; les droites qui joignent les divers points homologues passant toutes par un même point.

Je considère le point m qui a pour homologue m', et je le rapporte en m'' par une parallèle $m'm''$ à kf. De même m'' considéré comme appartenant à la première division, a pour homologue m''', par conséquent m^{IV}; et ainsi de suite; on voit donc que les divers rayons om, om'',... se rapprochent indéfiniment de la position of; et par suite m, m'',... se rapprochent de f.

La condition pour que ces points se rapprochent du second point double e est que l'on considère primitivement le point m comme appartenant à la deuxième division.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

2[e] *Solution.* — On peut arriver au même résultat par les formules de l'homographie.

En prenant l'origine au point O milieu de la IJ' qui unit les homologues de l'infini, l'homographie s'exprime par la formule

$$\mathrm{O}m\,\mathrm{O}m' + \lambda\, mm' + \nu = 0,$$

λ et ν étant des constantes

$$\lambda = \mathrm{OJ}', \quad \nu = \mathrm{OIOO}'.$$

Je puis remplacer mm' par $\mathrm{O}m' - \mathrm{O}m$, par exemple, en supposant $\mathrm{O}m' > \mathrm{O}m$.

Et j'obtiendrai $\mathrm{O}m'$ par la formule

$$(1) \qquad \mathrm{O}m' = \frac{\lambda\,\mathrm{O}m - \nu}{\mathrm{O}m + \lambda}.$$

Pour que mm' soit un point double, il faut que $\mathrm{O}m' = \mathrm{O}m$.

Or, si dans l'expression (1) je remplace $\mathrm{O}m$ par la valeur même de $\mathrm{O}m'$, j'aurai le segment $\mathrm{O}m''$ qui correspond à $\mathrm{O}m'$, m' étant considéré comme appartenant à la première division. En continuant ainsi de suite indéfiniment, l'expression (1) sera absolument la même que celle qui donne $\mathrm{O}m$. Au numérateur et au dénominateur, et par conséquent à la limite, le point considéré est venu occuper la position du point double.

Question 994

(voir 2[e] série, t. IX, p. 288);

PAR M. H. LAURENT,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

Si, en un point M *d'un hyperboloïde, on mène la normale et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre de la surface, en nommant* R *et* R' *les rayons de courbure*

principaux du point M, N *la longueur de la normale, on a*

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+\frac{2}{N}=0.$$

(LAURENT.)

Il s'est glissé, dans l'énoncé de cette question, une erreur que je vais rectifier; je profiterai aussi de l'occasion pour énoncer un théorème plus général.

Soit

$$f(x, y, z)=0$$

l'équation d'une surface quelconque. Si l'on pose

$$\frac{df}{dx}=l,\quad \frac{df}{dy}=m,\quad \frac{df}{dz}=n,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=a,\quad \frac{d^2f}{dy^2}=a',\quad \frac{d^2f}{dz^2}=a'',$$

$$\frac{d^2f}{dy\,dz}=b,\quad \frac{d^2f}{dx\,dz}=b',\quad \frac{d^2f}{dx\,dy}=b'';$$

$$\delta=\sqrt{l^2+m^2+n^2},\quad \Delta=a+a'+a'';$$

si enfin l'on désigne par R et R' les rayons de courbure principaux en (x, y, z), et par u l'un quelconque d'entre eux, on a

$$\begin{vmatrix} a-\frac{\delta}{u} & b'' & b' & l \\ b'' & a'-\frac{\delta}{u} & b & m \\ b' & b & a''-\frac{\delta}{u} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}=0;$$

d'où l'on conclut aisément

$$(1)\qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{\delta^3}\left[\Delta\delta^2-(al^2+a'm^2+a''n^2+2bmn+2b'ln+2b''lm)\right].$$

Si maintenant on considère la surface du second ordre osculatrice

$$0 = f(x, y, z) + (\xi - x) l + (\eta - y) m + (\zeta - z) n$$
$$+ \tfrac{1}{2}[a(\xi - x)^2 + a'(\eta - y)^2 + a''(\zeta - z)^2 + 2b(\zeta - z)(\eta - y)$$
$$+ 2b'(\xi - x)(\zeta - z) + 2b''(\xi - x)(\eta - y)],$$

et si l'on cherche la longueur N de la corde normale en (x, y, z) à cette surface, on a

$$\xi - x = \frac{lN}{\delta}, \quad \eta - y = \frac{mN}{\delta}, \quad \zeta - z = \frac{nN}{\delta},$$

et, par suite, en observant que $f(x, y, z) = 0$,

$$N(al^2 + a'm^2 + a''n^2 + 2bmn + 2b'ln + 2b''mb) + 2\delta^3 = 0.$$

L'équation (1) devient alors

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{\delta^3}\left[\Delta\delta^2 + \frac{2\delta^3}{N}\right],$$

ou bien, en appelant ν la valeur absolue de la normale,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\Delta}{\delta} \pm \frac{2}{\nu}.$$

Si l'on avait $\Delta = 0$, on aurait

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \pm \frac{2}{\nu}.$$

Applications.

1. Prenons l'hyperboloïde dont l'équation est

$$Ayz + Bzx + Cxy = 1;$$

on a ici $\Delta = 0$, donc

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \pm \frac{2}{\nu}.$$

Çet hyperboloïde est un hyperboloïde particulier sur lequel on peut appliquer trois droites de directions rectangulaires, puisque son cône asymptote contient les axes de coordonnées.

II. Dans le cylindre hyperbolique

$$xy = k^2,$$

on a

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{2}{N},$$

ou, si l'on veut, dans l'hyperbole équilatère, le rayon de courbure est la moitié de la corde normale correspondante, propriété analogue à celle du cercle.

EXERCICES.

1. Trouver le polynôme entier le plus simple qui, par des valeurs de la variable égales à 1, 2, 3, prend respectivement les valeurs 3, 6, 10, et qui est *maximum* pour $x = 5$.

Même question, le polynôme devant être *minimum* pour la même valeur de la variable.

2. Soient p, q, r trois points d'une conique, tels que les normales à la courbe menées par p, q, r concourent en un seul point. Si l'on mène par le sommet S trois droites parallèles à pr, qr, pq, et rencontrant la conique en q', p', r', le centre de gravité de ces trois points est sur l'axe principal qui passe par S.

3. Démontrer l'identité des deux séries suivantes :

$$x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots + x^{n^2},$$

et

$$\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \ldots + \varepsilon \frac{x^n}{1-x^n} + \ldots,$$

le coefficient ε ayant la valeur $+1$ ou -1, suivant la nature du nombre n; déterminer cette valeur de ε lorsque n est connu.

4. $f(x)$ et $\varphi(x)$ désignant deux polynômes sans facteur commun, trouver, en partant de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, des polynômes entiers U et V, tels que l'on ait

$$\mathrm{U}f(x) + \mathrm{V}\varphi(x) = 1.$$

QUESTIONS DE LICENCE.

1. De tous les points d'une courbe (A), comme centres, on décrit des cercles orthogonaux à un cercle fixe (C), de centre P et de rayon R.

Ces cercles enveloppent une anallagmatique. Appelons *aire de l'anallagmatique* la différence des aires comprises entre les arcs de l'enveloppe et (A), R restant constante :

1° L'aire de l'anallagmatique est minimum lorsque le point P est le centre de gravité de courbure de (A);

2° Les points P qui donnent lieu à des aires égales sont situés sur un même cercle.

2. La somme des aires des podaires d'un arc de courbe (A) et de l'arc correspondant de sa développée, prises par rapport à un point P, est minimum si P est le centre de gravité de courbure de l'arc considéré de (A).

Tous les points P donnant lieu à des sommes d'aires égales sont situés sur un même cercle.

3. Soient A et D les centres de gravité de courbure d'un arc de courbe (A) et de l'arc correspondant de sa

développée (D); la droite AD est perpendiculaire à la corde qui sous-tend l'arc (A); la longueur de cette corde est égale au produit de AD par l'angle des normales aux extrémités de (A).

A. RIBAUCOUR.

QUESTIONS.

999. S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_m x^{n-m+1} + \ldots + A_n x + A_{n+1} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$A_m = \frac{a^m - b^m}{a - b},$$

on a, depuis $m = 1$ jusqu'à $m = n$ inclusivement,

$$S_m = -(a^m + b^m).$$

On déduit de là que, a et b étant réels, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles.

(S. REALIS.)

1000. S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^n + a x^{n-1} + \frac{a(a+1)}{2} x^{n-2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3} x^{n-3} + \ldots + \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n-1)}{2.3.4\ldots n} = 0,$$

on a

$$S_n = S_{n-1} = S_{n-2} = \ldots = S_2 = S_1 = -a,$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{2.3.4\ldots n} - a,$$

On déduit de là que, a étant positif, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles; ce qui s'accorde avec l'énoncé de la question 776 (2e série, t. V, p. 432).

Note. — Pour l'équation

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \frac{x^{n-2}}{1.2} + \frac{x^{n-3}}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \frac{x}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots n} = 0,$$

on a évidemment

$$S_2 = S_3 = S_4 = \ldots = S_{n-1} = S_n = 0,$$

et l'on reconnaît de même que l'équation ne peut avoir deux racines réelles; ce qui s'accorde avec la question 775.

(S. Realis.)

1001. Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a et à m, l'expression

$$\frac{(a^2 + a)[(a+1)^{m-1} - a^{m-1}]}{m-1}$$

n'est pas la $m^{ième}$ puissance d'un nombre entier, et le nombre

$$\frac{m(a^2 + a)[(a+1)^{m-1} - a^{m-1}]}{(m-1)[(a+1)^m - a^m]}$$

n'est pas entier. (S. Realis.)

1002. En un point d'une ellipse, on prend sur la normale en dehors de la courbe une longueur égale au rayon de courbure en ce point : le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle lieu des angles droits circonscrits à l'ellipse.

(Steiner.)

1003. Les équations tangentielles d'un cône droit touchant trois plans donnés (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) sont, dans le cas des axes rectangulaires :

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2+v^2+w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2} \end{vmatrix} = 0;$$

les signes des radicaux sont indépendants; il y a quatre solutions. (L. PAINVIN.)

1004. Par deux points fixes, on mène un cercle variable; soient a et b deux des points où ce cercle coupe une conique fixe; le cercle variant, la droite ab enveloppe une courbe : construire géométriquement le point de contact de ab avec son enveloppe.

(LAGUERRE.)

1005. On donne une surface du second degré et une sphère; si l'on désigne par α, β, γ les angles sous lesquels trois plans diamétraux de la surface (ou trois diamètres conjugués) rencontrent la sphère, et par A, B, C les aires des sections déterminées par ces plans (ou les longueurs des diamètres), on a la relation

$$A^2 \sin^2\alpha + B^2 \sin^2\beta + C^2 \sin^2\gamma = \text{const.}$$

(H. FAURE.)

1006. L'aire de la courbe lieu du centre d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite fixe est la moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (H. BROCARD.)

THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE

(suite et fin, voir 2e série, t. IX, p. 317, 360 et 399);

Par M. J. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée de Bruges (Belgique).

---

11. Résumons maintenant les principaux résultats que nous venons d'obtenir.

Les définitions des indices proposées par M. Faure sont les expressions les plus simples de ces quantités. Mais pour justifier le nom commun d'*indice* donné à trois quantités relatives aux points, aux droites et aux plans considérés par rapport à une surface du second ordre, il convient, croyons-nous, de suivre la marche que nous avons tracée. L'indice d'une droite se définit alors très-naturellement en fonction de ceux de deux points conjugués, et celui d'un plan en fonction de ceux de trois points conjugués. Réciproquement, l'indice d'un point par rapport à une conique peut se définir en fonction de ceux de deux droites conjuguées; l'indice d'un point par rapport à une surface, en fonction de ceux des arêtes d'un trièdre conjugué; enfin l'indice d'une droite par rapport à une surface, en fonction de ceux de deux plans conjugués.

Les différentes sortes d'involutions, rectiligne, plane, faisceaux de droites, de plans ou de trièdres, jouissent de deux propriétés fondamentales communes :

1° La somme des inverses des indices des éléments conjugués est constante;

2° Le quotient du produit des indices des éléments conjugués, divisé par le carré de la distance de ces éléments (distance de deux points, surface de triangle, sinus d'angle) est constant.

L'involution *solide* formée par l'ensemble des tétraèdres conjugués avec une même surface jouit également de ces propriétés.

Au point de vue analytique, nos résultats ont également une certaine importance; ils donnent la signification géométrique de certaines fonctions (*covariants* et *contrevariants*) qui se présentent fréquemment dans les calculs. Si $f(x)=0\,[F(xx)=0]$ est l'équation de la surface en coordonnées ponctuelles et $\psi(p)=0\,[\Psi(pp)=0]$ l'équation en coordonnées tangentielles, ces fonctions seront, à des facteurs *invariants* près,

$$f(x). \qquad\qquad \psi(p).$$

$$\frac{1}{\overline{XY}^2}\begin{vmatrix} F(xx) & F(xy) \\ F(yx) & F(yy) \end{vmatrix}, \qquad \frac{1}{\sin^2(PQ)}\begin{vmatrix} \Psi(pp) & \Psi(pq) \\ \Psi(qp) & \Psi(qq) \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{\overline{XYZ}^2}\begin{vmatrix} F(xx) & F(xy) & F(xz) \\ F(yx) & F(yy) & F(yz) \\ F(zx) & F(zy) & F(zz) \end{vmatrix}, \qquad \frac{1}{\sin^2(P'Q'R')}\begin{vmatrix} \Psi(pp) & \Psi(pq) & \Psi(pr) \\ \Psi(qp) & \Psi(qq) & \Psi(qr) \\ \Psi(rp) & \Psi(rq) & \Psi(rr) \end{vmatrix},$$

où $\overline{XY}$ et $\overline{XYZ}$ représentent la distance de deux points ou la surface du triangle formé par trois points, sin(PQ) le sinus de l'angle dièdre de deux plans, et sin (P'Q'R') le sinus de l'angle polaire du trièdre formé par trois plans. Les dernières fonctions ne changent même pas pour tous les couples de points d'une même droite ou les couples de plans tournant autour d'une même droite, etc. Si H et H' désignent les *hessiens* de f et de ψ, les facteurs qui dépendent de f et de ψ peuvent aussi prendre

ie

$$\left(\mathrm{H}\,{p\;q\;r \atop p\;q\;r}\right),\quad \left(\mathrm{H}'\,{x\;y\;z \atop x\;y\;z}\right);$$

$$\left(\mathrm{H}\,{p\;q \atop p\;q}\right),\quad \left(\mathrm{H}'\,{x\;y \atop x\;y}\right);$$

$$\left(\mathrm{H}\,{p \atop p}\right),\quad \left(\mathrm{H}'\,{x \atop x}\right) \text{(*)}.$$

ıalogie nous conduit aussi à examiner la significa-
éométrique du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} F(xx) & F(xy) & F(xz) & F(xu) \\ F(yx) & F(yy) & F(yz) & F(yu) \\ F(zx) & F(zy) & F(zz) & F(zu) \\ F(ux) & F(uy) & F(uz) & F(uu) \end{vmatrix}.$$

ıs désignons par V le volume du tétraèdre XYZU,
ıurons

$$6V = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix};$$

$$6VH = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) \\ f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) & f_4(z) \\ f_1(u) & f_2(u) & f_3(u) & f_4(u) \end{vmatrix},$$

multipliant de nouveau par 6V,

$$36V^2H = \Delta.$$

(*) Nous avons omis certains détails dans les paragraphes précédents, pas rendre cet article trop long. Ainsi nous n'y avons pas parlé ınction $\left(\mathrm{H}\,{pqr \atop pqr}\right)$, croyant que le lecteur comblera facilement cette

Si les quatre points sont conjugués ou

$$F(xy) = F(xz) = \ldots = o,$$

on a plus simplement

$$36 V^2 H = \Delta = f(x) \times f(y) \times f(z) \times f(u);$$

et, comme $I_x = -\frac{f(x)}{f(\beta)}, \ldots, \; a^2 b^2 c^2 = -\frac{H^3}{B_{44}^2}, \; f(\beta) = \frac{H}{B_{44}},$
on retrouve

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{36 V^2}{I_x I_y I_z I_u}.$$

12. Pour compléter cette étude, nous avons encore à parler de la signification géométrique de l'*émanant* $F(xy)$. Désignons par (X, P_y) la distance du point X au plan polaire du point Y; nous aurons

$$(X, P_y) = \frac{2F(xy)}{\sqrt{f_1^2(y) + f_2^2(y) + f_3^2(y)}},$$

$$(O, P_y) = \frac{2f(\beta)}{\sqrt{f_1^2(y) + f_2^2(y) + f_3^2(y)}};$$

d'où

$$\frac{(X, P_y)}{(O, P_y)} = \frac{F(x, y)}{f(\beta)} = \frac{(Y, P_x)}{(O, P_x)},$$

équation qui convient encore aux coordonnées cartésiennes obliques et aux coordonnées tétraédriques.

Appelons *paramètre du couple de points* X, Y le rapport, pris en signe contraire, des distances du plan polaire de l'un d'eux à l'autre point et au centre de la surface, et représentons ce rapport par N_{xy}; nous aurons

$$N_{xy} = -\frac{F(xy)}{f(\beta)}, \quad N_{xx} = I_x.$$

La notion du paramètre peut servir à interpréter beau-

coup de résultats. L'on a, par exemple,

$$I_{xy} = \frac{N_{xy}^2 - N_{xx} N_{yy}}{\overline{XY}^2},$$

et réciproquement $N_{xy}^2 = I_{xy} \times \overline{XY}^2 + I_x I_y$.

Si les points X, Y sont sur la surface, il vient plus simplement

$$I_{xy} = \frac{N_{xy}^2}{\overline{XY}^2}, \quad \text{d'où} \quad N_{xy} = \frac{\overline{XY}^2}{D_{xy}^2},$$

D_{xy} étant la longueur du diamètre parallèle à XY. D'après cela, si nous désignons les paramètres des arêtes XY, XZ, XU d'un tétraèdre inscrit par λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2, et ceux des arêtes ZU, YU, YZ par μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2, de manière que $\lambda_1 = \frac{XY}{D_{xy}}, \ldots$, l'égalité $36V^2H = \Delta$ donnera

$$\frac{36V^2}{a^2b^2c^2} = (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)(-\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)$$
$$\times (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3).$$

Si XYZU et X'Y'Z'U' sont deux tétraèdres quelconques de volumes V et V', on trouve, par le procédé employé ci-dessus,

$$36VV'H = \begin{vmatrix} F(xx') & F(xy') & F(xz') & F(xu') \\ F(yx') & F(yy') & F(yz') & F(yu') \\ F(zx') & F(zy') & F(zz') & F(zu') \\ F(ux') & F(uy') & F(uz') & F(uu') \end{vmatrix}.$$

Si l'on suppose les tétraèdres XYZU et X'Y'Z'U' polaires réciproques par rapport à la surface f, cette égalité peut se transformer en

$$a^2b^2c^2 = -\frac{36VV'}{N_{xx'}N_{yy'}N_{zz'}N_{uu'}};$$

d'où l'on peut conclure le théorème Faure de la question 599.

13. Rapportons la surface f à un tétraèdre de référence $M_1 M_2 M_3 M_4$. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les distances du point variable X aux quatre faces du tétraèdre, (h_1, h_2, h_3, h_4) les quatre hauteurs du tétraèdre, et (a_1, a_2, a_3, a_4) les aires des faces. Si $\Sigma A_{rs} x_r x_s = 0$ est l'équation de la surface, on trouve sans difficulté, pour le paramètre du couple $A_r A_s$, $N_{rs} = -\frac{A_{rs} h_r h_s}{f(\beta)}$. La surface peut donc aussi être représentée par l'équation

$$\sum \frac{N_{rs}}{h_r h_s} x_r x_s = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma N_{rs} a_r a_s x_r x_s = 0.$$

Comme $N_{rr} = I_r$, $N_{rs}^2 = I_{rs} d_{rs}^2 + I_r I_s$, on peut aussi écrire

$$\Sigma I_1 a_1^2 x_1^2 + 2 \Sigma a_1 a_2 (I_1 I_2 + I_{12} d_{12}^2)^{\frac{1}{2}} x_1 x_2 = 0,$$

d_{rs} étant la longueur de l'arête $A_r A_s$. Cette équation a déjà été indiquée par M. Faure (*Nouvelles Annales*, année 1866, p. 8).

Si nous prenons pour coordonnées tétraédriques les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 des tétraèdres $XM_2 M_3 M_4, \ldots$, la surface peut se représenter plus simplement par

$$f(V) = \Sigma N_{rs} V_r V_s = 0.$$

Les dix paramètres N_{rs} sont liés par une relation assez simple qui peut s'obtenir comme il suit. Les coordonnées du sommet A_1 étant $(V, 0, 0, 0)$, on doit avoir

$$N_{11} = -\frac{f(V, 0, 0, 0)}{f(\beta)} = -\frac{N_{11} V^2}{f(\beta)}$$

ou

$$f(\beta) = -V^2.$$

Mais l'identité entre les quatre coordonnées tétraédriques étant

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V,$$

il faut remplacer, dans la valeur de $f(\beta)$ donnée au n° 1, les coefficients k_1, k_2, k_3, k_4 par $\frac{1}{V}$; par suite nous aurons, pour la relation cherchée,

$$\left(H \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = H,$$

ou

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ 1 & N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ 1 & N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ 1 & N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans les cas particuliers où le tétraèdre de référence est conjugué ou circonscrit par les arêtes, cette identité se réduit à

$$\frac{1}{N_{11}} + \frac{1}{N_{22}} + \frac{1}{N_{33}} + \frac{1}{N_{44}} = -1,$$

$$\sum \frac{1}{N_{11}} - 2 \sum \frac{1}{\sqrt{N_{11} N_{22}}} + 4 = 0.$$

La première a déjà été donnée au n° 3.

Note. — La question 837 a été résolue aussi par M. Pellet, élève du lycée de Nîmes, et M. D. Thomas, professeur à Oxford.

NOTE SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE

(suite et fin, voir 2e série, t. IX, p. 410);

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

II. — *Surface résultant de faisceaux de quadriques doublement tangentes.*

6. Supposons que chaque faisceau de quadriques se compose de surfaces doublement tangentes à l'une d'elles, alors les équations des deux faisceaux deviennent

$$S - \lambda PQ = 0, \tag{1}$$

$$S_1 - \mu P_1 Q_1 = 0; \tag{2}$$

si la relation homographique est

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$SP_1Q_1 + kS_1PQ = 0. \tag{3}$$

Cette surface contient les quatre coniques servant de bases aux deux faisceaux, et les quatre droites intersections des quatre plans P, Q, P_1, Q_1, savoir :

$$(P = 0,\ P_1 = 0),\quad (P = 0,\ Q_1 = 0),$$
$$(Q = 0,\ P_1 = 0),\quad (Q = 0,\ Q_1 = 0).$$

Tout plan mené par une de ces quatre droites coupe la surface suivant une courbe du troisième ordre.

Les équations de la seconde série des courbes génératrices sont

$$\left\{\begin{array}{l} P_1Q_1 - \nu PQ = 0, \\ S + \dfrac{k}{\nu} S_1 = 0. \end{array}\right.$$

La surface est d'ailleurs doublement tangente à toutes les surfaces de chaque faisceau.

Si les plans Q, Q_1 se confondent, l'équation de la surface devient

$$Q(SP_1 + kS_1P) = o.$$

La surface se compose donc d'un plan et d'une surface du trosième ordre.

Elle se réduirait enfin à une surface du second ordre et à un système de deux plans, si les plans P et P_1 se confondaient aussi.

7. Si les surfaces S, S_1 ne se correspondent pas et que la relation entre les paramètres soit

$$\lambda\mu + k = o,$$

l'équation de la surface résultante devient

$$SS_1 + kPP_1QQ_1 = o.$$

Si les plans Q, Q_1 se confondent, l'équation devient

$$SS_1 + kPP_1Q^2 = o;$$

la surface est tangente aux surfaces S, S_1 en toûs les points des deux coniques

$$(S = o,\ Q = o),\quad (S_1 = o,\ Q_1 = o).$$

Les huit coniques communes à la surface et aux quadriques données se réduisent donc à six.

8. Si l'un des faisceaux est composé de surfaces réglées, on a par exemple

$$S_1 = MN,$$

M, N étant des fonctions linéaires; l'équation de la surface devient, pour $\lambda + k\mu = o$,

$$SP_1Q_1 + kMNPQ = o:$$

sur la surface quatre coniques et huit droites. Si Q_1 et Q se confondent, on a

$$SP_1 + kMNP = 0;$$

on a trois séries de coniques dont les plans passent par les droites (P_1, M), (P_1, N), (P_1, P).

Pour

$$\lambda\mu + k = 0,$$

l'équation devient

$$SMN + kPP_1QQ_1 = 0;$$

les deux formes se confondent dans ce cas.

Si les deux faisceaux sont composés de surfaces réglées, l'équation de la surface devient

$$MNP_1Q_1 + kM_1N_1PQ = 0,$$

et la surface contient donc alors seize droites; elle est *le lieu des points tels, que les produits des distances de chacun d'eux aux faces de deux tétraèdres sont dans un rapport constant.*

III. — *Faisceaux de quadriques ayant pour bases des courbes de contact planes.*

9. Supposons maintenant que chacun des deux faisceaux de quadriques soit formé de surfaces ayant une courbe de contact plane commune.

Les équations des deux faisceaux sont alors

$$S - \lambda P^2 = 0,$$
$$S_1 - \mu P_1^2 = 0.$$

Si les paramètres λ, μ sont liés par la relation

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface est

$$SP_1^2 + kS_1P^2 = o;$$

la surface du quatrième ordre contient les coniques de contact des deux faisceaux, et elle touche toutes les quadriques suivant ces deux coniques. Elle renferme aussi une droite double (P, P_1). Tout plan mené par cette droite coupe la surface suivant une conique : c'est le second mode de génération de la surface.

Du reste, c'est une remarque que nous pouvons faire dès à présent, que, lorsqu'une droite double est sur la surface, tout plan mené par cette droite doit couper la surface suivant une conique : c'est une des bases de la classification des surfaces du quatrième degré de Kummer.

Lorsque la relation homographique est

$$\lambda\mu + k = o,$$

l'équation de la surface du quatrième ordre devient

$$SS_1 + kP^2P_1^2 = o.$$

Les quatre coniques (S, P), (S, P_1), (S_1, P), (S_1, P_1) sont des courbes de la surface, suivant lesquelles elle touche toutes les quadriques des deux faisceaux.

Enfin, si les deux surfaces S, S_1 se confondent, la surface se réduit à un système de deux surfaces du second ordre.

IV. — *Faisceaux de quadriques homothétiques.*

10. Ce cas est un cas particulier du précédent; il suffit, en effet, de supposer que l'un des plans P, P_1 ou Q, Q_1 passe à l'infini; l'une des courbes communes passe par conséquent à l'infini, et les surfaces du faisceau devien-

nent homothétiques. Mais nous allons voir que ce cas particulier présente un certain intérêt.

Si un seul des faisceaux se compose de surfaces homothétiques, la surface a pour équation

$$S\Sigma_1 + k\Sigma P = 0.$$

On voit qu'elle passe par les deux coniques (S, P), (Σ_1, P), et par la conique à l'infini. Si les surfaces homothétiques sont en outre concentriques, le second plan passe aussi à l'infini, et l'équation se réduit à

$$S\Sigma_1 + k\Sigma = 0.$$

Il est facile de voir que la surface des ondes de Fresnel et les surfaces (*) analogues correspondant aux diverses surfaces à centre du second ordre sont comprises dans cette forme. En effet, la surface des ondes de Fresnel a pour équation

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) \\ -a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(c^2+a^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0;$$

or on peut l'écrire évidemment

$$(x^2+y^2+z^2-R^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-p^2) \\ -(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-q^2)=0,$$

α, β, γ, R, p, q désignant des constantes; et l'on voit ainsi que cette surface est le lieu des intersections de deux faisceaux se composant l'un de sphères concentriques

$$x^2+y^2+z^2-R^2-\lambda=0,$$

l'autre de quadriques

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-p^2-\mu(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-q^2)=0,$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1861, et Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1864 (H. Durrande).

les deux paramètres étant liés par la relation

$$\lambda\mu + 1 = 0.$$

11. Passons au cas où les deux faisceaux se composent tous deux de surfaces homothétiques ; les équations de ces faisceaux sont

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ S_1 - \mu P_1 = 0. \end{cases}$$

Supposons d'abord λ et μ liés par la relation

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$(1) \qquad SP_1 + kS_1 P = 0,$$

ce qui montre que la surface est alors du troisième degré.

D'ailleurs, le second mode de génération est représenté par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} S + \dfrac{k}{\nu} S_1 = 0, \\ P_1 - \nu P = 0, \end{cases}$$

ce qui prouve que *la surface résultante de deux faisceaux homographiques, l'un de quadriques, l'autre de plans, est une surface du troisième degré passant par les deux coniques et la droite, bases des deux faisceaux.*

Ce résultat pouvait facilement être prévu.

12. Si les deux surfaces S, S_1 sont en outre doublement tangentes, alors on a

$$S_1 = S + MN,$$

M, N ayant la signification déjà donnée ; alors l'équation (1) devient

$$(2) \qquad S(P_1 + kP) + kPMN = 0.$$

A l'inspection de cette équation on reconnaît qu'il y a trois droites sur la surface, deux points doubles où elle touche la surface S, et trois séries de coniques réparties dans les plans

$$P_1 + m_1 P = 0, \quad P_1 + kP + m_2 M = 0, \quad P_1 + kP + m_3 N = 0.$$

On pourrait évidemment se proposer, dans tous les cas semblables à celui-ci, où l'on rencontre une ou plusieurs séries de coniques passant par une droite, ou dont les plans enveloppent une certaine surface, de trouver le lieu des centres de ces coniques. Cette recherche ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

13. Considérons ensuite le cas où l'on a

$$\lambda\mu + k = 0,$$

alors l'équation de la surface résultante devient

$$(3) \qquad SS_1 + kPP_1 = 0.$$

Elle est du quatrième ordre, et a une courbe double à l'infini.

14. Examinons d'une manière particulière le cas où les deux surfaces S, S_1 sont elles-mêmes homothétiques; alors S et S_1 ne diffèrent que par les termes du premier degré, et on peut poser $S_1 = S + M$; toutes les surfaces des deux faisceaux seront elles-mêmes homothétiques, et par suite les courbes d'intersection des quadriques correspondantes sont planes.

Soient

$$\begin{cases} S + M - \mu P_1 = 0 \\ S - \lambda P = 0 \end{cases}$$

les deux faisceaux de quadriques.

Si les paramètres λ, μ sont liés par la relation

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$(1) \qquad S(P_1 + kP) + kMP = 0.$$

La surface est du troisième ordre, elle a une conique à l'infini : c'est elle qui est commune aux deux faisceaux de quadriques.

On voit sans peine les deux séries de coniques situées sur la surface et passant par les deux droites que l'équation (1) met en évideuce.

15. Mais lorsque les paramètres sont liés par la relation

$$\lambda\mu + k = 0,$$

alors l'équation de la surface prend la forme

$$(1) \qquad S(S + M) + kPP_1 = 0;$$

la surface, qui est du quatrième ordre, a nne courbe double à l'infini, deux séries de sections coniques; chacun des plans de ces coniques coupe la surface suivant deux de ces courbes.

Les deux modes de génération de la surface sont représentés par les deux groupes d'équations

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ S + M + \dfrac{k}{\lambda} P_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S - \mu P_1 = 0, \\ S + M + \dfrac{k}{\mu} P = 0, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, par les deux suivants :

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ M + \lambda P + \dfrac{k}{\lambda} P_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S - \mu P_1 = 0, \\ M + \mu P_1 + \dfrac{k}{\lambda\mu} P = 0. \end{cases}$$

On voit très-nettement ainsi les deux séries de coniques. Les plans des deux séries sont d'ailleurs identiques si l'on pose $\mu = \frac{k}{\lambda\mu}$.

Tous ces plans, qui passent par un point fixe ($M=0$, $P=0$, $P_1=0$) sont tangents à un cône du second degré et doublement tangents à la surface.

Ces résultats se mettent facilement en évidence sur l'équation même de la surface; on peut, en effet, l'écrire

$$S^2 + SM + kPP_1 = 0$$

ou

$$\left(S + \frac{M}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(M^2 - 4kPP_1) = 0;$$

or

$$M^2 - 4kPP_1 = 0$$

est l'équation d'un cône circonscrit à la surface en tous les points de la courbe suivant laquelle il coupe la quadrique

$$S + \frac{M}{2} = 0.$$

Si le plan $M = 0$ passe à l'infini, c'est-à-dire si M se réduit à une constante, les deux surfaces S, $S + M$ sont concentriques; le cône circonscrit se transforme en un cylindre (*).

Si M est identiquement nul, les deux surfaces S, $S + M$ se confondent, le cône devient un système de deux plans ($P = 0$, $P_1 = 0$) qui touchent la surface suivant les deux courbes planes bases des deux faisceaux.

(*) On a bien remarqué sans doute que tout plan tangent au cône

$$M^2 - 4kPP_1 = 0$$

a une équation de la forme

$$mM + pP + p_1P_1 = 0,$$

ce qui est bien celle des plans des sections coniques.

Supposons que

$$S + \frac{M}{2} = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 1,$$

et que

$$\frac{1}{4}(M^2 - 4kPP_1) = mx^2 + ny^2 + pz^2:$$

alors l'équation que nous venons d'obtenir peut s'écrire

$$(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 1)^2 - (mx^2 + ny^2 + pz^2) = 0;$$

on peut encore l'écrire

$$(2)\ \left\{\begin{aligned}(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2 z + 1)^2 - (m + 4\alpha^2)x^2 - (n + 4\beta^2)y^2 \\ - (p + 4\gamma^2)z^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

ce qui met en évidence l'existence d'un autre cône circonscrit à la surface, et par suite une autre série double de sections coniques.

Enfin, on peut encore combiner les termes de l'équation des trois manières suivantes (*) :

$$(4)\ \left\{\begin{aligned}\left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + \frac{m + 2\alpha^2}{2\alpha^2}\right)^2 + \frac{m\beta^2 - n\alpha^2}{\alpha^2} y^2 \\ + \frac{m\gamma^2 - p\alpha^2}{\alpha^2} z^2 + 1 = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\ \left\{\begin{aligned}\left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + \frac{n + 2\beta^2}{2\beta^2}\right)^2 + \frac{n\alpha^2 - m\beta^2}{\beta^2} x^2 \\ + \frac{n\gamma^2 - p\beta^2}{\beta^2} z^2 + 1 = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\ \left\{\begin{aligned}\left(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + \frac{p + 2\gamma^2}{2\gamma^2}\right)^2 + \frac{p\alpha^2 - m\gamma^2}{\gamma^2} x^2 \\ + \frac{p\beta^2 - n\gamma^2}{\gamma^2} y^2 + 1 = 0.\end{aligned}\right.$$

(*) L'idée de ce mode de décomposition m'a été fournie par la Note de M. Darboux sur un système de surfaces orthogonales (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 1865).

On aperçoit ainsi trois cylindres circonscrits à la surface, et les trois séries de plans tangents à ces cylindres déterminent des sections coniques dans la surface.

Il existe donc pour cette surface du quatrième ordre cinq séries de plans coupant la surface suivant des couples de coniques. (*Voir* Note II.)

V. — *Faisceaux de sphères.*

16. Il est bien évident que tout ce que l'on vient de dire sur les surfaces résultant des intersections de deux faisceaux de quadriques homothétiques s'applique aux surfaces résultant des intersections de deux faisceaux de sphères.

Mais comme les surfaces du quatrième et du troisième ordre que l'on peut obtenir ainsi jouissent de propriétés remarquables, il n'est pas inutile de traiter séparément ce qui les concerne.

17. Considérons d'abord le cas des surfaces du troisième degré; elles résultent, comme précédemment, des intersections de deux faisceaux de sphères dont les plans radicaux passent par une droite fixe; on peut donc substituer à l'équation d'un des faisceaux de sphères celle d'un faisceau de plans. Soient donc

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ Q - \mu Q_1 = 0 \end{cases}$$

les équations des deux faisceaux; si l'on a

$$\lambda + k\mu = 0,$$

l'équation de la surface résultante est

$$SQ_1 + kPQ = 0. \tag{1}$$

Soit

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

l'équation de la sphère donnée,

$$Q_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$
$$P = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$
$$Q = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'' :$$

l'équation de la surface devient

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)$$
$$+ k(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta')(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'')$$
$$- R^2(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$

Si l'on cherche par exemple le lieu des points d'intersection d'un faisceau de sphères passant par un cercle fixe ou tangentes à un plan donné en un point donné, avec les plans polaires correspondants d'un point fixe, ce lieu est évidemment une des surfaces dont nous venons de former l'équation; car tous ces plans polaires passent par une droite fixe.

Les sections de cette surface par des plans sont des courbes assez étudiées, telles que la strophoïde oblique et d'autres qui s'en rapprochent.

A l'inspection de l'équation (1), on remarque sans peine qu'il y a deux séries de sections circulaires, puisqu'il y a deux droites situées sur la surface.

Dans le cas des faisceaux de sphères, les surfaces résultantes ont une définition géométrique très-simple; ainsi, pour les surfaces du troisième ordre, on voit qu'on peut les définir le *lieu des points dont la puissance par rapport à une sphère fixe multipliée par la distance à un plan fixe est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce même point à deux plans fixes.*

Si la relation entre les paramètres est

$$\lambda\mu + k = 0,$$

les plans radicaux passant toujours par une droite fixe, l'équation de la surface résultante ne change pas de forme.

18. Si les plans radicaux des sphères correspondantes ne passent plus par une droite fixe, on n'a plus le droit de substituer l'équation d'un faisceau de plans à celle de l'un des faisceaux de sphères.

Soient alors

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ S_1 - \mu P_1 = 0 \end{cases}$$

les équations des deux faisceaux de sphères ayant respectivement pour bases deux cercles fixes.

Il n'y a pas lieu de faire la supposition

$$\lambda + k\mu = 0,$$

ce serait retomber sur le cas précédent; mais si l'on pose

$$\lambda\mu + k = 0,$$

alors l'équation de la surface résultante est

$$(2) \qquad SS_1 + kPP_1 = 0.$$

C'est la forme déjà trouvée au n° 15; et, de plus, si l'on fait

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = \rho^2 - R^2,$$
$$S_1 = S + M,$$

on voit que l'équation (2) prend la forme

$$(3) \qquad \rho^4 + \rho^2 u_1 + u_2 = 0,$$

u_1 désignant une fonction du premier degré et u_2 une

fonction du second degré des trois variables; ρ n'est autre chose que le rayon vecteur d'un point (x, y, z) de la surface.

Tout ce qui a été dit au n° 15 sur les sufaces résultant de faisceaux de quadriques homothétiques peut se répéter ici. A toute série de sections coniques répond une série de sections circulaires, ce qu'il était facile de prévoir.

Mais nous trouvons quelque chose de plus à remarquer dans le cas qui nous occupe. Passons en revue quelques formes de l'équation (3).

1° Si u_2 et u_1 sont des fonctions homogènes, la surface représentée par l'équation (3) est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface du second degré.

En effet, en séparant les termes de chaque degré, l'équation d'une quadrique peut s'écrire

$$u_2 + u_1 + u_0 = 0;$$

or, par la transformation dont il s'agit et qui revient, si la puissance est égale à l'unité, à changer x en $\frac{x}{\rho^2}$, y en $\frac{y}{\rho^2}$, z en $\frac{z}{\rho^2}$, une fonction homogène u_m, de degré m, se transforme en $\frac{u_m}{\rho^{2m}}$: donc l'équation de la surface transformée sera

$$u_0 \rho^4 + \rho^2 u_1 + u_2 = 0,$$

et en faisant $u_0 = 1$, ou en divisant tout par u_0, on retombe sur la forme (3).

Or on sait que si l'on a deux surfaces orthogonales, en les transformant par rayons vecteurs réciproques, on obtient encore deux surfaces orthogonales; donc il est facile de prévoir, d'après la remarque précédente et le théorème que je viens de rappeler, que l'équation (3)

doit renfermer des systèmes de surfaces orthogonales (*). Ainsi, par exemple, si l'on considère les surfaces ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

(*) Le théorème relatif à la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui se démontre facilement par des considérations géométriques, peut aussi se démontrer de la manière suivante :

Soit $f(x, y, z)=\rho$, $f_1(x, y, z)=\rho_1$, $f_2(x, y, z)=\rho_2$ un système triple de surfaces orthogonales; on sait que l'on a trois relations de la forme

$$\sum \frac{d\rho_i}{dx}\frac{d\rho_j}{dx}=0.$$

On a par la transformation en question

$$x=\frac{x'}{r'^2},\quad y=\frac{y'}{r'^2},\quad z=\frac{z'}{r'^2},\quad r'^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

ou bien

$$x'=\frac{x}{r^2},\quad y'=\frac{y}{r^2},\quad z'=\frac{z}{r^2},\quad r^2=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{r'^2};$$

et de plus

$$\frac{x'}{r'^4}=\frac{x}{r'^2}=r^2x,\ldots.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dx'}&=\frac{1}{r'^2}\frac{d\rho}{dx}-\frac{2x'}{r'^4}\left(x'\frac{d\rho}{dx}+y'\frac{d\rho}{dy}+z'\frac{d\rho}{dz}\right)\\&=r^2\frac{d\rho}{dx}-2x\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)\\&=r^2\frac{d\rho}{dx}-2\mathrm{H}x;\end{aligned}$$

de même

$$\frac{d\rho_1}{dx'}=r^2\frac{d\rho_1}{dx}-2\mathrm{H}_1x.$$

Donc

$$\sum\frac{d\rho}{dx'}\frac{d\rho_1}{dx'}=r^4\sum\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}-4\mathrm{H}\mathrm{H}_1r^2+4\mathrm{H}\mathrm{H}_1\Sigma x^2,$$

et comme

$$\Sigma x^2=r^2,$$

on voit que les deux derniers termes se détruisent; donc

$$\sum\frac{d\rho}{dx'}\frac{d\rho_1}{dx'}=r^4\sum\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}=0.$$

C. Q. D. F.

l'équation de leurs transformées est

$$\rho^4 - \frac{x^2}{a^2-\lambda} - \frac{y^2}{b^2-\lambda} - \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 0.$$

2° Je prends maintenant l'équation (3)

$$\rho^4 + \rho U_1 + U_2 = 0,$$

dans laquelle je suppose que U_1 et U_2 ne soient plus des fonctions homogènes, mais des fonctions complètes de leurs degrés respectifs, de sorte que

$$U_1 = v_1 + v_0,$$
$$U_2 = u_2 + u_1 + u_0;$$

si l'on applique à cette forme la transformation par rayons vecteurs réciproques, on trouve

$$u_0 \rho^4 + (u_1 + v_0)\rho^2 + u_2 + v_1 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire une équation

$$\rho^4 + V_1 \rho^2 + V_2 = 0$$

de forme identique à la proposée.

Les surfaces comprises dans cette forme d'équation ont donc la propriété de se reproduire par la transformation par rayons vecteurs réciproques; de là le nom d'*anallagmatiques* qui leur a été donné par M. Moutard.

Elles ont la propriété très-importante de former un système simple de surfaces orthogonales. La forme de l'équation (2) montre d'ailleurs qu'elles sont *le lieu des points dont le produit des puissances par rapport à deux sphères fixes est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point à deux plans fixes.*

On pourra lire, dans les *Annales scientifiques de l'École Normale,* 1865, une Note de M. Darboux sur ces surfaces remarquables, et différentes Notes de M. Mou-

tard, indiquant plusieurs de ces propriétés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864.

Le tore et la cyclide sont des cas particuliers de ces surfaces.

NOTE I

(relative au n° 3).

Les courbes d'un même système peuvent se rencontrer si un système de valeurs des variables x, y, z vérifie à la fois les équations

$$S = 0, \quad S_1 = 0, \quad \Sigma = 0, \quad \Sigma_1 = 0,$$

ce qui n'a pas lieu en général. Dans ce cas elles passent précisément par ces points communs.

NOTE II.

On peut se rendre compte très-aisément, et pour ainsi dire *à priori*, de la différence des degrés des surfaces obtenues par l'intersection des deux faisceaux de quadriques homothétiques, d'après le degré de la relation en λ, μ.

Soient

$$\begin{cases} S - \lambda P = 0, \\ S + M - \mu P_1 = 0 \end{cases}$$

les équations des deux faisceaux; on voit qu'on peut substituer à l'une d'elles l'équation

$$M - \mu P_1 + \lambda P = 0,$$

qui est celle d'une série de plans.

Si la relation entre λ et μ est du premier degré, ces plans passent par une droite fixe, et la surface résultante est du troisième degré (n° 11); mais si la relation entre λ et μ est de la forme

$$\lambda\mu + k = 0,$$

l'équation des plans renfermera l'un des paramètres au second degré, et par conséquent ces plans enveloppent un cône, et en même temps la surface résultante est du quatrième degré.

En remplaçant l'un des faisceaux des sphères par un faisceau de plans parallèles, on a pour les équations des surfaces génératrices

$$S - \lambda P = 0,$$
$$1 - \mu P_1 = 0,$$

et avec la relation

$$\mu\lambda + k = 0,$$

on trouve

$$S + kPP_1 = 0$$

pour l'équation de la surface résultante.

On voit ainsi que *les séries de sections circulaires des surfaces du second, du troisième et du quatrième degré sont les intersections de faisceaux homographiques de sphères.*

EXPRESSION DE LA DISTANCE D'UNE COURBE A SA SPHÈRE OSCULATRICE;

PAR CH. BUCHONNET (de Lausanne).

M (*) et M′ étant deux points d'une courbe gauche infiniment voisins, nous désignerons par ds l'arc MM′, par ε l'angle de contingence, par η l'angle de torsion, par r le rayon de courbure et par R le rayon de la sphère osculatrice au point M, enfin par dS l'arc de l'arête de

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

rebroussement de la surface polaire correspondant au point M.

Rappelons d'abord quelques théorèmes dont nous aurons à faire usage.

I. La longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine d'un arc plan ou gauche infiniment petit sur la tangente en son extrémité est égale à la moitié du produit de l'arc par l'angle de contingence.

II. La limite de la direction de cette perpendiculaire coïncide avec la direction de la normale principale à l'origine de l'arc.

III. Le centre du cercle de courbure et celui de la sphère osculatrice sont situés sur la polaire, laquelle est perpendiculaire au plan osculateur. La surface polaire est le lieu des polaires. L'arête de rebroussement de la surface est le lieu des centres des sphères osculatrices. La polaire est tangente à cette arête; d'où il suit que l'angle de contingence de l'arc dS est égal à η. Les extrémités de cet arc, que nous désignerons par S et S', sont les centres des sphères osculatrices aux points M et M' de la courbe primitive.

IV. Par chaque point de la surface polaire il passe une développée de la courbe primitive.

V. Les normales principales en M à la courbe primitive et en S à l'arête de rebroussement de la surface polaire sont parallèles.

Nous avons désigné par S le centre de la sphère osculatrice au point M : soit P le point en lequel la droite menée de S au point M' infiniment voisin de M traverse cette sphère. Représentant par δ la distance de la courbe à la sphère osculatrice, on a

$$\delta = \mathrm{PM}',$$

et c'est de cette grandeur qu'il s'agit de trouver l'expression.

Considérons à cet effet celle des développées qui passe par le point S; soit T le point de cette développée qui correspond à M'; SM et TM' sont tangents à la développée, le premier en S, le second en T. Soit Q le point en lequel TM' traverse la sphère: dans le triangle M'PQ, les angles en P et en Q sont droits à la limite, et par conséquent on a PM' = QM'; donc

$$\delta = QM' = TM' - TQ.$$

On a, rigoureusement,

$$TM' = \text{arc}\,ST + SM = \text{arc}\,ST + SQ,$$

donc

$$\delta = \text{arc}\,ST + SQ - TQ,$$

ou, appelant D le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur TQ,

$$(a) \qquad \delta = (\text{arc}\,ST - DT) + (SQ - DQ).$$

La grandeur δ est ainsi mise sous la forme d'une somme de deux différences. Étudions d'abord la première.

Le point T est situé sur la polaire au point M', et cette polaire est tangente en S' à l'arête de rebroussement de la surface polaire. Dès lors, la perpendiculaire SE abaissée de S sur S'T a pour expression de sa longueur $\frac{1}{2}\eta d\text{S}$ (I et III). Par suite, on obtiendra la valeur de l'arc ST en divisant cette expression par le cosinus de l'angle TSE. La limite de la direction ST n'est autre que celle du rayon SM ou R. Quant à SE, la limite de sa direction est celle de la normale principale en S à l'arête (2); et cette normale est parallèle à la normale principale en M à la courbe primitive (5), c'est-à-dire au rayon r. Il suit de là que l'angle en question n'est

autre que celui des rayons R et r, et que son cosinus est par conséquent égal à $\frac{r}{R}$. On a donc

$$(b)\qquad \text{arc ST} = \frac{1}{2}\,\frac{R\eta\, dS}{r},$$

quantité de second ordre infinitésimal, MM′ ou ds étant considéré comme du premier.

L'angle des droites SM et TM′, tangentes à l'arc ST en ses extrémités, est évidemment égal à $\frac{MM'}{SM}$ ou $\frac{ds}{R}$; on a donc

$$(c)\qquad \text{angle de contingence de l'arc ST} = \frac{ds}{R},$$

quantité du premier ordre.

Ceci posé, pour évaluer la première des deux différences qui figurent dans l'égalité (a), rapportons l'arc ST à trois axes rectangulaires en prenant le point S pour origine. Choisissons pour plan des xy le plan osculateur à l'arc en ce point, et pour axe des x la tangente SM.

Un arc infiniment petit est égal à sa projection sur la tangente en son origine; conséquemment, dans le système d'axes que nous venons d'adopter, l'arc ST est égal à l'x du point T. L'angle des tangentes extrêmes d'un arc infiniment petit est égal à l'angle des tangentes extrêmes de sa projection sur le plan osculateur en son origine; donc, dans notre système d'axes, l'angle des tangentes en S et en T est égal au $\frac{dy}{dx}$ du point T. Dès lors, puisqu'en vertu des relations (b) et (c) l'ordre infinitésimal de l'arc ST est double de celui de l'angle de ses tangentes extrêmes, l'équation de la projection de cet arc sur le plan xy sera, en désignant par A une constante,

$$y = \mathrm{A}x^{\frac{3}{2}} + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } \tfrac{3}{2};$$

en effet, l'axe des x est tangent à l'origine à la courbe que représente cette équation, et comme elle donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} A x^{\frac{1}{2}} + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } \tfrac{1}{2},$$

on voit que l'ordre de x, supposé infiniment petit, est double de celui de $\frac{dy}{dx}$.

Quant à l'équation de la projection de l'arc sur le plan xz, si, désignant par B une constante, on la met sous la forme

$$z = B x^p + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } p,$$

p sera plus grand que $\frac{3}{2}$, puisque le plan xy est osculateur à l'arc en son origine.

On a, en désignant par ξ l'x du point T,

$$\text{arc ST} = \int_0^\xi dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Nous négligeons les quantités d'ordres supérieurs à celui de ξ^2. On trouve alors, en effectuant,

$$\text{arc ST} = \xi + \frac{9}{16} A^2 \xi^2.$$

Passons au calcul de TD; on a

$$\text{TD} = \text{corde ST} \cos \text{STD}.$$

La corde ST a pour expression $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, η et ζ étant l'y et le z du point T. Désignons ce radical par H, et par a, b, c, α, β, γ les cosinus des angles que la corde ST et la tangente au point T font avec les axes; on aura

$$\text{TD} = \text{H}(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

On a

$$a = \frac{\xi}{H}, \quad b = \frac{\eta}{H}, \quad c = \frac{\zeta}{H},$$

et en représentant par K le radical $\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}$, où $\frac{d\eta}{d\xi}$ et $\frac{d\zeta}{d\xi}$ désignent les valeurs que $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ prennent au point T, on a

$$\alpha = \frac{1}{K}, \quad \beta = \frac{1}{K}\frac{d\eta}{d\xi}, \quad \gamma = \frac{1}{K}\frac{d\zeta}{d\xi}.$$

Donc

$$TD = \frac{\xi}{K} + \frac{\eta}{K}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\zeta}{K}\frac{d\zeta}{d\xi}.$$

Comme nous négligeons les quantités d'ordres supérieurs à celui de ξ^2, il faut, dans l'évaluation du facteur $\frac{1}{K}$, négliger celles d'ordres supérieurs à l'ordre de ξ ; on trouve

$$K = 1 + \frac{9}{8}A^2\xi;$$

d'où

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{9}{8}A^2\xi;$$

d'où

$$\frac{\xi}{K} = \xi - \frac{9}{8}A^2\xi^2, \quad \frac{\eta}{K}\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{2}A^2\xi^2, \quad \frac{\zeta}{K}\frac{d\zeta}{d\xi} = 0;$$

d'où

$$TD = \xi + \frac{3}{8}A^2\xi^2;$$

d'où

$$\text{arc ST} - TD = \frac{3}{16}A^2\xi^2.$$

A cause de $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{2}A\xi^{\frac{1}{2}}$, cette dernière expression peut être mise sous la forme $\frac{\xi}{12}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$. Or ξ et $\frac{d\eta}{d\xi}$ sont, en

tant qu'infiniment petits, respectivement égaux à l'arc ST et à son angle de contingence, dont les valeurs sont données aux équations (b) et (c). Substituant ces valeurs, il vient

$$\text{arc ST} - \text{TD} = \frac{\eta\, ds^2 dS}{24 r R},$$

quantité du quatrième ordre infinitésimal.

Passons à la seconde différence. SD étant perpendiculaire à DQ, SQ — DQ est de l'ordre du carré de SD, par conséquent d'un ordre supérieur au quatrième, puisque, l'angle STD tendant vers zéro, SD est infiniment petit par rapport à l'arc ST qui est du second ordre. Cette seconde différence doit donc être négligée devant la première, et la valeur de δ est donnée par celle-ci. Remplaçant dans son expression r par $\frac{ds}{\varepsilon}$, il vient

$$\delta = \frac{\varepsilon \eta\, ds\, dS}{24 R}.$$

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES FOYERS D'UNE SECTION PLANE DANS UNE SURFACE DE SECOND ORDRE;

PAR M. LOUIS SALTEL.

Dans une courbe algébrique, un foyer a pour caractère analytique d'être tel, *que si l'on imagine menées de ce point les tangentes à la courbe, deux d'entre elles aient leur point de contact à l'intersection de la polaire* « directrice dans les coniques » *et du point considéré comme un cercle de rayon nul. En d'autres termes, l'équation quadratique des tangentes doit contenir le facteur* $(x^2 + y^2) = 0$.

D'après cela, pour qu'un point soit foyer d'une section plane d'une surface, *il faut et il suffit que, si l'on imagine mené de ce point le cône circonscrit à la surface, son intersection totale avec le plan de la courbe contienne au moins un cercle de rayon nul.*

Or on sait que, s'il s'agit d'une surface de second ordre pour que cette dernière condition soit remplie, *il faut et il suffit que le plan sécant soit une direction de sections circulaires.*

De là une solution que je propose et que je vais développer.

Soient α, β, γ les coordonnées du foyer et

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

$$(2) \qquad mx + ny + pz + q = 0$$

les équations de la surface et du plan.

Le cône circonscrit à la surface est représenté par l'équation

$$4f(x, y, z)f(\alpha, \beta, \gamma) = (xl'_\alpha + yl'_\beta + zl'_\gamma + tl'_\rho)^2.$$

Considérons les termes du second degré

$$(3) \quad A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_2z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_2xy = 0.$$

L'ensemble des directions des sections circulaires étant déterminées par les formules

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &(A_1 - \rho_1)x^2 + (A'_1 - \rho_1)y^2 + (A''_1 - \rho_1)z^2 \\ &\qquad + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(A_1 - \rho_1)(A'_1 - \rho_1)(A''_1 - \rho_1) + (A_1 - \rho_1)B_1^2 \\ &\qquad + (A'_1 - \rho_1)B'^2_1 + (A''_1 - \rho_1)B''^2_1 - 2B_1B'_1B''_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

les relations qui expriment que le plan donné satisfait à

la condition voulue seront deux quelconques des suivantes :

$$(6) \qquad (A''_1 - \rho_1) m^2 - 2B' pm + (A_1 - \rho_1) p^2 = 0,$$

$$(7) \qquad (A''_1 - \rho_1) n^2 - 2B\, np + (A'_1 - \rho_1) p^2 = 0,$$

$$(8) \qquad (A'_1 - \rho_1) m^2 - 2B'' mn + (A_1 - \rho_1) n^2 = 0.$$

On les obtient en exprimant que les trois plans coordonnés rencontrent suivant les mêmes droites les plans (4) et le plan (2) où l'on a supposé $q = 0$. Si l'on y joint l'équation

$$(9) \qquad m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0,$$

on a les trois relations déterminant les coordonnées des foyers.

Cela posé, supposons, par exemple, que l'on ait

$$(10) \qquad f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

les équations précédentes se réduisent aux suivantes :

$$\frac{\left(H - a^2\rho_1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)}{a^2} x^2 + \frac{\left(H - b^2\rho_1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)}{b^2} y^2 + \frac{\left(H - c^2\rho_1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)}{c^2} z^2$$
$$- 2\frac{\beta\gamma}{b^2c^2} yz - 2\frac{\gamma\alpha}{a^2c^2} zx - 2\frac{\alpha\beta}{a^2c^2} xy = 0,$$

$$\left(H - a^2\rho_1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)\left(H - b^2\rho_1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(H - c^2\rho_1 - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)$$
$$- \left[\left(H - a^2\rho_1 - \frac{\alpha^2}{b^2}\right)\frac{\beta^2\gamma^2}{b^2c^2} + \left(H - b^2\rho_1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\frac{\gamma^2\alpha^2}{c^2a^2}\right.$$
$$\left. + \left(H - c^2\rho - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\frac{\alpha^2\beta^2}{a^2b^2}\right]$$
$$- 2\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2} = 0,$$

ou bien

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&(\mathrm{H}-a^2\rho_1)(\mathrm{H}-b^2\rho_1)(\mathrm{H}-c^2\rho_1)\\&\quad-\Big[(\mathrm{H}-b^2\rho_1)(\mathrm{H}-c^2\rho_1)\frac{\alpha^2}{a^2}+(\mathrm{H}^2-c^2\rho_1)(\mathrm{H}-a^2\rho_1)\frac{\beta^2}{b^2}\\&\qquad\qquad+(\mathrm{H}-a^2\rho_1)(\mathrm{H}-b^2\rho_1)\frac{\gamma^2}{c^2}\Big]=0,\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad m^2\left(\frac{\mathrm{H}}{c^2}-\rho_1-\frac{\gamma^2}{c^4}\right)+2mp\frac{\alpha\gamma}{a^2c^2}+p^2\left(\frac{\mathrm{H}}{a^2}-\rho_1-\frac{\alpha^2}{a^4}\right)=0,$$

$$(13)\quad n^2\left(\frac{\mathrm{H}}{c^2}-\rho_1-\frac{\gamma^2}{c^4}\right)+2np\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}+p^2\left(\frac{\mathrm{H}}{b^2}-\rho_1-\frac{\beta^2}{b^4}\right)=0,$$

$$(14)\quad m^2\left(\frac{\mathrm{H}}{b^2}-\rho_1-\frac{\beta^2}{b^4}\right)+2mn\frac{\alpha\beta}{a^2b^2}+n^2\left(\frac{\mathrm{H}}{a^2}-\rho_1-\frac{\alpha^2}{a^4}\right)=0,$$

$$(15)\qquad m\alpha+n\beta+p\gamma+q=0.$$

On a posé

$$\mathrm{H}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1.$$

Remarquons que les équations (12), (13), (14) sont en général équivalentes aux équations

$$(16)\quad \mathrm{H}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{m^2}{c^2}\right)-\rho_1(p^2+m^2)=\left(\frac{p\alpha}{a^2}-\frac{m\gamma}{c^2}\right)^2,$$

$$(17)\quad \mathrm{H}\left(\frac{p^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)-\rho_1(p^2+n^2)=\left(\frac{p\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}\right)^2,$$

$$(18)\quad 2\mathrm{H}\frac{mn}{c^2}-2\rho_1 mn=2\left(\frac{p\alpha}{a^2}-\frac{m\gamma}{c^2}\right)\left(\frac{p\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}\right).$$

On obtient, en effet, l'équation (18) en multipliant les équations (12), (13), (14) respectivement par les quantités, généralement différentes de zéro, $\left(\frac{n}{m}\right)$, $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(-\frac{p^2}{mn}\right)$, et les ajoutant. Quant aux deux premières de

ce dernier système, elles sont identiques avec les deux premières de l'autre système.

Appliquons ces formules générales aux problèmes suivants :

Problème I. — *Trouver le lieu des foyers des sections centrales.*

Les coordonnées des foyers pour une position particulière du plan étant déterminées par deux des équations (16), (17), (18), jointes aux équations (11) et (15) où l'on fait ($q = 0$), on obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant (m, n, p, ρ_1) entre ces quatre équations. L'équation (11) en ρ_1 étant indépendante de (m, n, p), on est conduit à éliminer ces quantités entre les autres : cela est facile. Il suffit de multiplier respectivement par (α^2, β^2, $\alpha\beta$) les équations (16), (17), (18) et de les ajouter en ayant égard à (15). On trouve, toutes réductions faites,

$$-\rho_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = \mathrm{H}+1.$$

La substitution de cette valeur de ρ_1 dans l'équation (11) fournit immédiatement l'équation du lieu. Avant de faire cette substitution, remarquons qu'elle peut s'écrire, en tenant compte de ce dernier résultat,

$$\begin{aligned}\rho_1^3 a^2b^2c^2 &- \rho_1^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\\ &-\rho_1^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)+\rho_1(a^2+b^2+c^2)+\mathrm{H}=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\rho_1^2(a^2\alpha^2&+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)-(\mathrm{H}+1)\\ &+(a^2\rho_1+1)(b^2\rho_1+1)(c^2\rho_1+1)=0.\end{aligned}$$

Si maintenant on substitue, il vient, en remplaçant (α, β, γ)

par (x, y, z),

$$\left[(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2-z^2)^2\right]$$
$$\times(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$-\left[a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+(x^2+y^2+z^2)\right]$$
$$\times\left[b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]$$
$$\times\left[c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]=0.$$

Problème II. — *Trouver le lieu des foyers des sections faites parallèlement à l'un des axes.*

Supposons que les plans soient, par exemple, parallèles à l'axe des x. Cela exige $m=0$. Dès lors, si l'on fait cette hypothèse dans les formules fondamentales (12), (13), (14), (15), elles se réduisent aux suivantes :

$$(19)\qquad H-a^2\rho_1-\frac{\alpha^2}{a^2}=0,$$

$$n^2\left(\frac{H}{c^2}-\rho_1-\frac{\gamma^2}{c^4}\right)+2np\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}+p^2\left(\frac{H}{b^2}-\rho_1-\frac{\beta^2}{b^4}\right)=0,$$

$$n\beta+p\gamma+q=0,$$

et conséquemment en supprimant le facteur $\frac{\alpha^2}{a^2}$ l'équation en ρ_1 se réduira à

$$(20)\qquad (H-b^2\rho_1)\frac{\gamma^2}{c^2}+(H-c^2\rho_1)\frac{\beta^2}{b^2}=0.$$

Telles sont les formules qui, dans l'hypothèse actuelle, définissent les foyers. On obtiendra l'équation de leur lieu en éliminant ρ_1 entre les équations (19) et (20). On

obtient immédiatement

$$\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}+x^2\right]$$
$$-\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}\right]=0.$$

Nota. Ainsi se trouvent établis, par une analyse différente, les résultats obtenus par M. Painvin (*voir* t. III, p. 481). Je crois que, si l'on compare les deux méthodes, la précédente présente des interprétations géométriques et des simplifications algébriques qui la rendent préférable.

Il nous reste cependant à faire remarquer que si les considérations précédentes se prêtent avec facilité à la détermination des lieux géométriques, elles seraient moins avantageuses que celles dont nous avons fait usage dans une autre Note, s'il s'agissait de calculer effectivement les coordonnées des foyers d'une section particulière. Nous terminerons en proposant le problème suivant :

Trouver le lieu des foyers des paraboles obtenues par les plans parallèles aux plans tangents au cône asymptote.

NOTE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS DE L'ÉQUATION $x^m = y^n + 1$.

I. *Lorsque le nombre représenté par x est premier, l'équation proposée n'a pas d'autre solution entière et positive que la solution*

$$x=3,\quad m=2,\quad y=2,\quad n=3\ (*).$$

C'est ce que nous allons démontrer.

(*) En n'admettant toutefois, pour les inconnues, que des valeurs entières supérieures à l'unité.

L'exposant n de y est nécessairement impair; autrement l'équation proposée se ramènerait à la forme $x^m = z^2 + 1$, et l'on sait que cette dernière équation n'admet aucune solution entière. (*Voir* la démonstration de M. Le Besgue, *Nouvelles Annales*, 1re série, t. IX, p. 178.)

De plus, il est évidemment permis de considérer l'exposant n comme un nombre premier; car, si n admet un diviseur premier α autre que n, en posant $y^{\frac{n}{\alpha}} = Y$ l'équation proposée se réduira à celle-ci : $x^m = Y^\alpha + 1$, où l'exposant de Y est premier.

Cela posé, l'équation $x^m = y^n + 1$ peut s'écrire

$$x^m = (y+1)(y^{n-1} - y^{n-2} + y^{n-3} - \ldots - y + 1),$$

et, comme la division de $y^{n-1} - y^{n-2} + y^{n-3} - \ldots - y + 1$ par $y+1$ donne pour reste le nombre n, il vient, en nommant N le quotient de cette division,

$$(1) \qquad x^m = (y+1)[N(y+1)+n].$$

Chacun des deux facteurs $(y+1)$, $N(y+1)+n$ de x^m étant divisible par le nombre premier x, ce nombre est aussi diviseur de n; or n est premier, donc

$$(2) \qquad x = n.$$

Plus généralement, tout facteur de x^m est une puissance entière de x; pour le facteur $y+1$, l'exposant de cette puissance est l'unité. En effet, soit $y+1 = x^\alpha$, il en résulte

$$x^m = x^\alpha(Nx^\alpha + n) = x^\alpha(Nx^\alpha + x) = x^{\alpha+1}(Nx^{\alpha-1} + 1),$$

et, si α surpassait l'unité, le facteur $Nx^{\alpha-1} + 1$ de x^m ne serait pas divisible par x; donc $\alpha = 1$, et

$$(3) \qquad y + 1 = x = n.$$

En remplaçant x par $y+1$, l'équation proposée $x^m=y^n+1$ devient

$$(4) \qquad (y+1)^m=y^n+1,$$

et l'on voit que l'exposant m doit être moindre que n. Mais $n=x=y+1$; on a par conséquent l'inégalité

$$m<y+1.$$

D'autre part, l'équation (4) donne

$$y^m+my^{m-1}+\ldots+my+1=y^n+1,$$

d'où

$$y^{m-1}+my^{m-2}+\ldots+m=y^{n-1},$$

égalité qui montre que m est multiple de y; donc

$$(5) \qquad m=y.$$

Si maintenant on substitue y et $y+1$ à m et n, dans l'équation (4), il en résultera d'abord

$$(y+1)^y=y^{y+1}+1,$$

puis, divisant par y^y,

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=y+\frac{1}{y^y}.$$

Or, $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ ayant pour limite le nombre e, on a nécessairement

$$y+\frac{1}{y^y}<3;$$

ainsi le nombre entier y est compris entre 1 et 3, par conséquent $y=2$. Il s'ensuit $x=3$, $m=2$, $n=3$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*La suite prochainement.*)

THÉORÈMES SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. O. CALLAUDREAU,
à Angoulême.

1. La partie d'une tangente mobile comprise dans la courbe est constante et le lieu de son milieu est le cercle triplement tangent à la courbe.

2. La distance des centres de courbure correspondant aux intersections de la tangente mobile avec la courbe est constante et égale au double du diamètre du cercle directeur.

3. La somme des carrés des distances du centre du cercle directeur à ces mêmes centres de courbure est constante et égale à dix fois le carré du rayon du cercle directeur.

SUR LA FONCTION POTENTIELLE ET LE POTENTIEL;

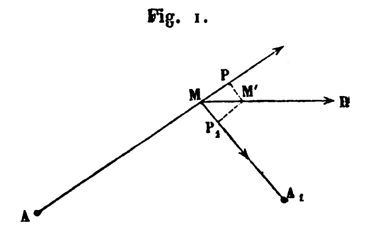
PAR M. J. MOUTIER.

L'étude de la fonction potentielle et du potentiel n'a pas pénétré jusqu'ici dans l'enseignement, parce qu'elle repose sur des notions d'Analyse qui dépassent les limites du Cours de Mathématiques spéciales. On se propose, dans cet article, d'exposer d'une manière élémentaire les principales propriétés de ces fonctions remarquables, qui jouent actuellement un rôle considérable dans les questions de Physique mathématique.

Fonction de force. — Soit M un point sollicité par

des forces dirigées vers des points fixes A, A_1...; ces forces sont des fonctions des distances $AM = r$, $A_1M = r_1$,..., que nous représenterons par $f(r)$, $f_1(r_1)$,...; elles ont pour résultante la force R. Nous supposerons que l'une de ces forces, la première, soit répulsive, la seconde attractive.

Fig. 1.



Considérons un déplacement élémentaire MM' du point M (*fig.* 1), suivant la direction de la résultante; projetons le point M' en P, P_1,... sur la direction des forces. Le travail élémentaire de la résultante R est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes

$$R \times MM' = f(r) \times MP + f_1(r_1) \times MP_1 + \ldots.$$

Désignons par $r + dr$, $r_1 + dr_1$,... les rayons vecteurs menés des centres fixes A, A_1,... au point M' infiniment voisin de M; les perpendiculaires M'P, $M'P_1$,... diffèrent infiniment peu des arcs de cercle décrits des points A, A_1,... comme centres avec les rayons AM', A_1M',..., de sorte que $MP = dr$, $MP_1 = -dr_1$,..., et l'équation précédente peut s'écrire

$$R \times MM' = f(r)\,dr - f_1(r_1)\,dr_1 \pm \ldots.$$

Or, soient $\varphi(r)$, $\varphi_1(r_1)$,... les fonctions qui ont pour dérivées $f(r)$, $f_1(r_1)$,...,

$$R \times MM' = \varphi'(r)\,dr - \varphi'_1(r_1)\,dr_1 \pm \ldots.$$

Désignons par U la somme algébrique de ces fonctions $\varphi(r), \varphi_1(r_1), \ldots,$

$$U = \varphi(r) - \varphi_1(r_1) \pm \ldots = \Sigma\varphi(r),$$

en prenant positivement les fonctions qui correspondent aux forces répulsives et négativement celles qui correspondent aux forces attractives. Le second membre de l'avant-dernière équation n'est autre chose que l'accroissement infiniment petit dU qu'éprouve la fonction U lorsque le point M passe de la position M à la position M′ infiniment voisine. Par suite,

$$R \times MM' = dU$$

et

$$R = \frac{dU}{MM'}.$$

La fonction U a été désignée par Hamilton sous le nom de *fonction de force ;* la résultante R est le rapport que l'on obtient en divisant l'accroissement de la fonction de force pour un déplacement élémentaire, effectué suivant la direction de la résultante, par la valeur de ce même déplacement. On exprime ainsi ce résultat sous forme abrégée :

La résultante des forces est la dérivée de la fonction de force prise par rapport à la direction de la résultante.

Composante de R *suivant une direction quelconque.* — Une marche analogue à la précédente permet de trouver la composante de la résultante R relative à une direction quelconque.

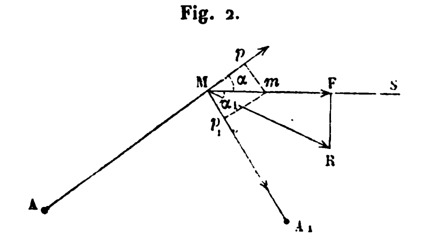
La composante F de la force R relative à une direction MS (*fig.* 2) est égale à la somme algébrique des projections des forces du système sur cette direction. Si

l'on appelle α, α_1,... les angles des forces avec cette direction :

$$F = f(r)\cos\alpha + f_1(r_1)\cos\alpha_1 + \ldots.$$

Imaginons un déplacement élémentaire Mm suivant

Fig. 2.



la direction MS, et multiplions les deux membres de la relation précédente par Mm,

$$F \times Mm = f(r)\cos\alpha \times Mm + f_1(r_1)\cos\alpha_1 \times Mm + \ldots.$$

Projetons le point m en p, p_1,... sur les directions des forces,

$$F \times Mm = f(r) \times Mp + f(r_1) \times Mp_1 + \ldots.$$

Appelons $r + dr$, $r_1 + dr_1$,... les rayons vecteurs Am, A_1m,..., et remarquons que $Mp = dr$, $Mp_1 = -dr_1$,...,

$$F \times Mm = f(r)\,dr - f_1(r_1)\,dr_1 \pm \ldots,$$

de sorte que si l'on appelle dU l'accroissement qu'éprouve la fonction de force lorsque le point M passe de la position M à la position m infiniment voisine,

$$F = \frac{dU}{Mm}.$$

La projection de la résultante des forces du système

sur une direction quelconque est la dérivée de la fonction de force par rapport à cette direction.

Lorsque la fonction de force est exprimée au moyen des coordonnées du point M rapporté à trois axes rectangulaires, les projections X, Y, Z de la résultante R sur les trois axes ont respectivement pour valeurs

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz},$$

et

$$R = \sqrt{\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2}.$$

Surfaces de niveau. — Nous avons appelé en Hydrostatique (*) *surface de niveau* le lieu géométrique des points où la pression est la même, et nous avons vu qu'une surface de niveau est normale en chacun de ses points à la résultante des forces qui sollicitent le liquide. Une surface de niveau en général est telle, que la normale en chacun de ses points a pour direction la résultante des forces qui existent en ce point.

La surface de niveau qui passe par un point M se détermine facilement d'après ce qui précède. La projection de la résultante R sur une direction quelconque menée par le point M dans le plan tangent à la surface de niveau est nulle; par suite, l'accroissement de la fonction de force est nul pour tout déplacement élémentaire effectué dans le plan tangent à la surface, $dU = 0$ ou $U =$ const. pour tous les points d'une même surface de niveau.

Ainsi, *la fonction de force est la même en tous les points d'une même surface de niveau.*

En donnant dans la relation $U =$ const. différentes

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII.

valeurs à cette constante, on obtient une famille de surfaces de niveau.

Exemples. — 1° Prenons comme premier exemple le cas bien connu d'un liquide pesant tournant autour d'un axe vertical, et cherchons les surfaces de niveau, ou, ce qui revient au même, la méridienne de ces surfaces.

Prenons l'axe de rotation pour axe des y, un point M de masse égale à l'unité est sollicité par son poids g et par la force centrifuge $x\omega^2$, en appelant ω la vitesse angulaire de rotation.

D'après ce qui précède, la fonction de force est

$$U = \frac{x^2\omega^2}{2} - gy,$$

et par suite la méridienne cherchée est définie par la relation $\frac{x^2\omega^2}{2} - gy = \text{const.}$, qui représente une famille de paraboles ayant pour axe OY et dans lesquelles la sous-normale a la valeur constante $\frac{g}{\omega^2}$.

2° Un point mobile est soumis à l'action de forces dirigées vers des centres fixes et proportionnelles aux distances à ces centres fixes; on propose de déterminer le mouvement du point.

Les forces étant représentées par ar, $a_1 r_1, \ldots$, la fonction de force est

$$U = \frac{1}{2}(ar^2 + a_1 r_1^2 + \ldots).$$

Les surfaces de niveau sont donc représentées par la relation précédente, dans laquelle U est regardé comme une constante.

Un calcul simple montre que ces surfaces sont des sphères ayant pour centre commun le centre de gravité G

d'un système de masses égales à a, $a_1, \ldots$, placées aux points fixes A, $A_1, \ldots$; le rayon ρ de la sphère est donné par la relation

$$\rho^2 = \frac{2U - (a\delta^2 + a_1\delta_1^2 + \ldots)}{a + a_1 + \ldots},$$

en représentant par δ, $\delta_1, \ldots$ les distances du point G aux centres fixes A, $A_1, \ldots$.

Les surfaces de niveau étant des sphères concentriques, la résultante passe constamment par ce centre commun; de plus, elle est mesurée par la dérivée de U par rapport à ρ, elle est proportionnelle à ρ; par suite, si le point mobile n'a pas de vitesse initiale, il exécute un mouvement oscillatoire autour du point G.

Fonction potentielle. — Dans ce qui précède, les fonctions des distances $f(r)$, $f_1(r_1), \ldots$, qui représentent les forces, sont entièrement arbitraires; au contraire, dans l'étude de l'attraction, de l'électricité, du magnétisme, les forces sont inversement proportionnelles aux carrés des distances ; dans ce cas très-important, la fonction de force a été désignée par George Green sous le nom de *fonction potentielle*; elle est ordinairement représentée par la lettre V :

$$V = \sum \pm \frac{m}{r},$$

le signe $\pm$ se rapportant soit aux répulsions, soit aux attractions. Comme première application, nous allons déterminer, au moyen de la fonction potentielle, l'attraction exercée par une couche sphérique homogène sur un point extérieur ou intérieur.

(*La suite prochainement.*)

EXERCICE.

Étant donné un triangle ABC et étant construits sur les côtés de ce triangle d'autres triangles (le sommet du triangle construit sur le côté BC de ABC est désigné par A_1, etc.), les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes :

1° Si les triangles construits sont isoscèles et ont leurs angles aux sommets supplémentaires des angles opposés dans ABC, c'est-à-dire si

$$A_1B = A_1C, \quad BA_1C + BAC = 180°;$$

2° Si les angles des triangles construits sont tels que l'on ait

$$BCA_1 = ACB_1, \quad CAB_1 = BAC_1, \quad ABC_1 = CBA_1;$$

3° Si l'on a

$$CBA_1 = C, \quad ACB_1 = A, \quad BAC_1 = B,$$
$$BCA_1 = A, \quad CAB_1 = B, \quad ABC_1 = C.$$

O. Callaudreau.

QUESTIONS.

1007. Par chaque point d'une surface du second degré on peut faire passer deux cônes de révolution circonscrits à la surface. Ces cônes se coupent suivant deux coniques dont les tangentes au point considéré de la surface sont aussi tangentes aux sections circulaires de la surface qui

passent par ce point. Les lignes de courbure qui passent par le même point sont les bissectrices des angles formés par les deux tangentes. (ÉMILE WEYR.)

1008. Tout cube parfait différent de zéro, augmenté de 1, 2 ou 8 unités d'un ordre quelconque, n'est pas un cube parfait. (MORET-BLANC.)

1009. On donne une infinité de cercles tangents en un même point; si deux droites tournent autour de ce point de manière à faire avec la ligne des centres deux angles dont la somme soit constante, les circonférences décrites sur les cordes de ces cercles comme diamètres étant prises deux à deux ont même axe radical.

(CHADU.)

1010. Trouver les nombres dont les carrés s'écrivent toujours de la même façon dans tout système de numération analogue au système décimal, dont la base est plus grande que 4. (GUÉBHARD.)

1011. On donne un tétraèdre conjugué à une surface du second degré. Si l'on désigne par I l'indice (*) du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre (par rapport à la surface) et par R le rayon de cette sphère, l'expression $\frac{I}{R^2}$ a la même valeur pour toutes les sphères inscrites.

(H. FAURE.)

1012. Trouver le lieu d'un point M tel, que le triangle formé par les tangentes issues de ce point à une conique et par la corde des contacts ait une aire constante.

(*) La définition des indices est donnée dans la question 918.

SUR LE NOMBRE DES NORMALES RÉELLES QUE L'ON PEUT MENER D'UN POINT DONNÉ A UN ELLIPSOÏDE;

PAR JOACHIMSTHAL.

(Traduit de l'allemand. — Extrait du tome LIX du *Journal de Crelle.*)

I.

Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ l'équation de l'ellipsoïde, ξ, η, ζ les coordonnées du point donné.

Les coordonnées du pied d'une normale passant par le point (ξ, η, ζ) satisfont aux équations

$$(1)\qquad \frac{\xi-x}{\frac{x}{a}}=\frac{\eta-y}{\frac{y}{b}}=\frac{\zeta-z}{\frac{z}{c}}.$$

Désignons par $-u$ la valeur commune de ces trois rapports; on a

$$(2)\qquad x=\frac{a\xi}{a-u},\quad y=\frac{b\eta}{b-u},\quad z=\frac{c\zeta}{c-u},$$

et u doit satisfaire à l'équation du sixième degré

$$(3)\qquad \frac{a\xi^2}{(a-u)^2}+\frac{b\eta^2}{(b-u)^2}+\frac{c\zeta^2}{(c-u)^2}=1.$$

On voit par l'équation (1) que u est le produit des distances de l'origine des coordonnées et du point (ξ, η, ζ) au plan qui touche l'ellipsoïde au point (x, y, z), ce produit étant pris positivement ou négativement, suivant que ces deux points sont situés d'un même côté du plan ou de côtés différents.

Pour résoudre le problème proposé, il convient d'introduire dans (3), au lieu de ξ, η et ζ, trois autres constantes.

L'équation (3) a nécessairement deux racines réelles; si nous supposons

$$a > b > c,$$

l'une est comprise entre $-\infty$ et c, l'autre entre a et $+\infty$.

Supposons connue l'une de ces racines; soient ν cette racine et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du pied de la normale correspondante.

On déduit de (2) les équations suivantes

$$(4)\quad \xi = \frac{x_0(a-\nu)}{a},\quad \eta = \frac{y_0(b-\nu)}{b},\quad \zeta = \frac{z_0(c-\nu)}{c};$$

et comme le point (x_0, y_0, z_0) est sur l'ellipsoïde, on sait que l'on peut déterminer deux quantités α et β, dont la première soit comprise entre a et b et la deuxième entre b et c, en sorte que l'on ait

$$(4^*)\quad \left\{\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)},\\ y_0^2 &= \frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)},\\ z_0^2 &= \frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned}\right.$$

Au moyen des équations (4) et (4*), l'équation (3) devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\nu)^2}{(a-b)(a-c)(a-u)^2}+\frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\nu)^2}{(b-a)(b-c)(b-u)^2}\\ &\qquad+\frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\nu)^2}{(c-a)(c-b)(c-u)^2}=1. \end{aligned}\right.$$

Au sujet des constantes α, β, ν, qui remplacent les constantes primitives ξ, η, ζ, je ferai remarquer que α et β

déterminent le pied d'une des normales passant par le point (ξ, η, ζ) et que ν fixe la position du point sur cette normale. En désignant par π le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent au point (α, β), on voit que $\frac{\nu}{\pi}$ est la distance du point (ξ, η, ζ) au pied de la normale, les longueurs prises sur la normale étant comptées comme positives lorsqu'elles sont dirigées vers l'intérieur de l'ellipsoïde. Les quantités α et β satisfont aux conditions

$$a > \alpha > b > \beta > c;$$

je suppose d'ailleurs qu'elles n'atteignent pas leurs valeurs limites, ce qui exclut le cas où la normale serait dans un plan principal, cas que j'examinerai plus tard en particulier. La quantité ν peut avoir une valeur arbitraire.

Pour débarrasser l'équation (5) de la racine $u = \nu$, je pose

$$a - \nu = a - u + u - \nu, \ldots;$$

il vient

$$\sum \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)} + 2(u-\nu)\sum \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{a-u}$$
$$+ (u-\nu)^2 \sum \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{(a-u)^2} = 1.$$

La première somme est égale à 1, la deuxième à $\frac{(a-u)(\beta-u)}{(a-u)(b-u)(c-u)}$; et, si l'on représente cette dernière expression par $f(u)$, la troisième somme est $f'(u)$.

L'équation précédente devient donc

$$(u-\nu)[2f(u) + (u-\nu)f'(u)] = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $(u - v)$,

$$(6) \quad \frac{2}{u-v} = \frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} + \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}.$$

Cette équation du cinquième degré est le point de départ des recherches qui suivent.

II.

Il s'agit, pour chaque valeur de v, de déterminer le nombre des racines réelles de l'équation (6). Il résulte de cette équation qu'à toute valeur réelle de u correspond une valeur réelle de v, puisque cette dernière quantité est donnée par une équation du premier degré. Si, lorsqu'on fait varier u depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, v acquiert n fois une valeur donnée v_0; réciproquement, en faisant dans (6) $v = v_0$, l'équation en u qui en résulte a n racines réelles. Il faut donc examiner la marche de v, lorsqu'on la considère comme une fonction de u définie par l'équation (6).

Le terme à droite de cette équation

$$\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-\alpha} + \frac{1}{u-b} - \frac{1}{u-\beta} + \frac{1}{u-c}$$

peut s'écrire

$$(7) \quad \frac{1}{u-a} - \frac{\alpha-b}{(u-\alpha)(u-b)} - \frac{\beta-c}{(u-\beta)(u-c)},$$

ou encore

$$(7^*) \quad \frac{a-\alpha}{(u-a)(u-\alpha)} + \frac{b-\beta}{(u-b)(u-\beta)} + \frac{1}{u-c}.$$

Comme on a les inégalités $a > \alpha > b > \beta$, on peut partager l'intervalle depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ en six in-

tervalles, et faire varier u de $-\infty$ à c, de c à β, de β à b, de b à α, de α à a, de a à $+\infty$.

Pour le premier, le troisième et le cinquième intervalle, (7) présente une somme de termes négatifs; pour les trois autres, (7*) présente une somme de termes positifs. Le terme à gauche de l'équation (6) ne s'évanouit jamais pour aucune valeur finie de u. On parvient au même résultat, en tirant de (6) la valeur de v :

$$(8)\quad v = u - 2\frac{(u-a)(u-\alpha)(u-b)(u-\beta)(u-c)}{W} = \frac{U}{W};$$

U est un polynôme du cinquième degré, le dénominateur W est du quatrième degré et reste toujours positif; ainsi v est une fonction continue de u.

Au moyen de l'équation (8), on peut dresser ce premier tableau indicateur de la marche de v :

$$\left\{\begin{array}{lccccccccccc} u = & -\infty & c & \begin{array}{c}>c\\<\beta\end{array} & \beta & \begin{array}{c}>\beta\\<b\end{array} & b & \begin{array}{c}>b\\<\alpha\end{array} & \alpha & \begin{array}{c}>\alpha\\<a\end{array} & a & +\infty \\ v = & +\infty & c & <\beta & \beta & >\beta & b & <\alpha & \alpha & >\alpha & a & -\infty. \end{array}\right.$$

Pour étudier plus avant la question, il faut déterminer les maxima et les minima de v.

Il résulte de (8)

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\varphi(u)}{W^2},$$

expression qui est une fonction continue de u. Il en résulte que v ne peut devenir maximum ou minimum que pour les racines de l'équation $\varphi(u) = 0$; on a d'ailleurs

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{W\varphi'(u) - 2W'\varphi(u)}{W^3},$$

expression qui, pour les racines de l'équation $\varphi(u) = 0$, se réduit à

$$-\frac{\varphi'(u)}{W^2};$$

on conclut de là que les racines *simples* de $\varphi(u) = 0$ donnent seules les maxima et les minima de v.

En différentiant (6), on obtient

$$\frac{2}{(u-v)^2}\left(\frac{dv}{du}-1\right) = -\frac{1}{(u-a)^2} - \frac{1}{(u-b)^2} - \frac{1}{(u-c)^2} + \frac{1}{(u-\alpha)^2} + \frac{1}{(u-\beta)^2}.$$

Posons $\frac{dv}{du} = 0$ et éliminons v au moyen de l'équation (6), il viendra

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\left[\frac{1}{(u-a)^2} + \frac{1}{(u-b)^2} + \frac{1}{(u-c)^2} - \frac{1}{(u-\alpha)^2} - \frac{1}{(u-\beta)^2}\right] \\ & - \left(\frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}\right)^2 = 0; \end{aligned} \right.$$

en chassant les dénominateurs de cette égalité, on obtiendra l'équation

$$\varphi(u) = 0.$$

Il s'agit maintenant de déterminer le nombre et les limites des racines de cette équation du huitième degré.

III.

Lemme. — Soient $\varphi(u)$ une fonction entière de u et $\varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du}$; soient, en outre, V et θ deux fonctions de la même variable liées à la première par la relation

$$(11)\qquad \varphi - V\varphi' + \theta = 0.$$

Cela posé, si u variant depuis A jusqu'à B (B étant plus grand que A), V et θ restent finis; si, de plus, θ ne s'évanouit jamais, et par conséquent garde toujours le même signe, l'équation $\varphi(u) = 0$ n'a dans cet intervalle aucune

racine multiple, et le nombre des racines réelles comprises entre les limites données est égal au nombre des variations que perd la suite

$$\varphi \quad \varphi' \quad \theta,$$

lorsqu'on y fait successivement $u = \mathrm{A}$ et $u = \mathrm{B}$; ce nombre de racines est donc au plus égal à deux.

La première partie de cette proposition est évidente; la deuxième se démontre par la méthode de Sturm.

Appliquons maintenant ce lemme à l'équation (10). En posant

$$(u-a)(u-b)(u-c) = \mathrm{D},$$

$$(u-\alpha)(u-\beta) = \Delta, \quad \frac{\mathrm{D}}{\Delta} = z,$$

on a

$$(u) = \mathrm{D}^2\Delta^2 \left\{ 2\left[\frac{1}{(u-a)^2} + \frac{1}{(u-b)^2} + \frac{1}{(u-c)^2} - \frac{1}{(u-\alpha)^2} - \frac{1}{(u-\beta)^2}\right] - \left(\frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}\right)^2 \right\}$$

et

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta};$$

d'où

$$\varphi(u) = \mathrm{D}^2\Delta^2\left[\frac{2(z'^2 - zz'')}{z^2} - \frac{z'^2}{z^2}\right] = \Delta^4(z'^2 - 2zz''),$$

d'où encore

$$\varphi'(u) = 4\Delta^3\Delta'(z'^2 - 2zz'') - 2\Delta^4 zz'''$$

et

$$(12) \qquad 4\Delta'\varphi(u) - \Delta\varphi'(u) = 2\Delta^4 \mathrm{D} z'''.$$

On a maintenant

$$z = \frac{\mathrm{D}}{\Delta} = u + \lambda + \frac{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{u-\alpha} + \frac{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}{\beta-\alpha}\,\frac{1}{u-\beta},$$

λ étant indépendant de u; par suite,

$$\Delta^4 z''' = -6\left[\frac{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}{\alpha-\beta}(u-\beta)^4 + \frac{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}{\beta-\alpha}(u-\alpha)^4\right] = -6f(u);$$

les coefficients de $(u-\beta)^4$ et de $(u-\alpha)^4$, dans la parenthèse, étant essentiellement négatifs, il en est de même de $f(u)$.

En remplaçant dans (12) Δ', Δ, D et $\Delta^4 z'''$ par leurs valeurs, il vient

$$(13)\quad \varphi(u) - \frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{4(2u-\alpha-\beta)}\varphi'(u) + \frac{3(u-a)(u-b)(u-c)}{2u-\alpha-\beta}f(u) = 0.$$

Pour appliquer le lemme précédent, on peut prendre simplement

$$\theta = -\frac{(u-a)(u-b)(u-c)}{2u-\alpha-\beta},$$

attendu que, d'après ce qui précède, $f(u)$ est toujours négatif.

θ change de signe quand u passe par l'une des valeurs a, b, c et $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Cette dernière quantité est $< a$ et $> c$; mais elle peut être $>$ ou $< b$; il faut donc distinguer chacun de ces deux cas.

Comme le premier terme de $\varphi(u)$ est $+u^8$, nous avons

(15)
$\varphi(-\infty) = +,\quad \varphi(+\infty) = +;$
on trouve ensuite immédiatement
$\varphi(c) = (c-a)^2(c-b)^2(c-\alpha)^2(c-\beta)^2 = +,$
de même pour $\varphi(b)$ et $\varphi(c)$;
$\varphi(\beta) = -3(\beta-a)^2(\beta-b)^2(\beta-c)^2(\beta-\alpha)^2 = -,$
de même pour $\varphi(\alpha)$.

On a, de plus,

$$\varphi'(-\infty)=-,\quad \varphi'(+\infty)=+,$$

et l'on déduit de (13)

$$\varphi'(a)=\frac{4(2a-\alpha-\beta)}{(a-\alpha)(a-\beta)}\varphi(a)=+;$$

$$\varphi'(b)=\frac{4(2b-\alpha-\beta)}{(b-\alpha)(b-\beta)}\varphi(b),$$

par conséquent

$$=+,\quad \text{si}\quad b>\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

et

$$=-,\quad \text{si}\quad b<\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

$$\varphi'(c)=\frac{4(2c-\alpha-\beta)}{(c-\alpha)(c-\beta)}=-;$$

$$\frac{-\beta}{\;}\Big)=-\frac{48}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-a\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-b\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-c\right)f\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right),$$

par conséquent

$$=+,\quad \text{si}\quad b>\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

t

$$=-,\quad \text{si}\quad b<\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

(*La suite prochainement.*)

SUR LA FONCTION POTENTIELLE ET LE POTENTIEL

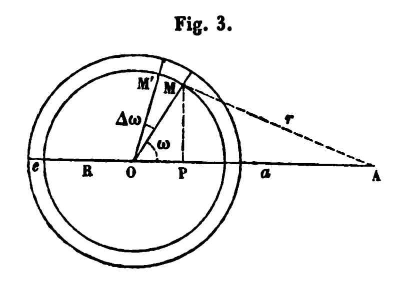
(suite et fin, voir 2e série, t. IX, p. 342);

PAR M. J. MOUTIER.

Attraction d'une sphère homogène sur un point extérieur. — Considérons une couche sphérique homogène e rayon intérieur R, d'épaisseur e, de densité δ, et pro-

posons-nous de calculer la fonction potentielle relative à un point A placé en dehors de la sphère, ayant pour masse l'unité, et situé à une distance du centre de la sphère OA $= a$.

Fig. 3.



Considérons une section passant par la droite OA, et menons deux rayons OM, OM' infiniment voisins, faisant avec OA les angles ω et $\omega + d\omega$; ces rayons découpent sur les cercles de rayons R et R $+ e$ un rectangle infinitésimal dont l'aire est $\mathrm{R}\,d\omega . e$; abaissons du point M sur OA la perpendiculaire $\mathrm{MP} = \mathrm{R}\sin\omega$, et faisons tourner le rectangle élémentaire autour de OA comme axe; il engendre un volume ayant pour expression, d'après le théorème de Guldin,

$$\mathrm{R}\,d\omega . e \times 2\pi \mathrm{R} \sin\omega.$$

Si l'on désigne par r la distance AM, la fonction potentielle relative à ce volume est

$$-\frac{\mathrm{R}\,d\omega . e \times 2\pi \mathrm{R} \sin\omega \times \delta}{r};$$

d'un autre côté, si l'on représente par V la fonction potentielle relative à la portion de la couche qui correspond à l'angle ω, l'expression précédente est l'accroissement $d\mathrm{V}$ qu'éprouve la fonction potentielle pour l'ac-

croissement $d\omega$

$$\frac{dV}{d\omega} = -\frac{Re \times 2\pi R \sin\omega . \delta}{r}.$$

D'ailleurs, dans le triangle OMA,

$$r^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\omega;$$

en prenant les dérivées des deux membres par rapport à r,

$$r = aR\sin\omega \frac{d\omega}{dr}.$$

Éliminons $\sin\omega$ au moyen de cette dernière relation

$$\frac{dV}{d\omega} \times \frac{d\omega}{dr} = -\frac{2\pi Re\delta}{a}.$$

Le premier membre est la dérivée de V par rapport à r, V est donc la fonction de r, qui a pour dérivée $-\frac{2\pi Re\delta}{a}$,

$$V = -\frac{2\pi Re\delta r}{a} + C,$$

en désignant par C une constante. Pour $\omega = 0$ ou $r = a - R$, $V = 0$, on a done

$$0 = -\frac{2\pi Re\delta(a - R)}{a} + C.$$

Par suite,

$$V = -2\pi Re\delta\frac{r - a + R}{a}.$$

La fonction potentielle relative à la couche sphérique entière s'obtient en faisant

$$\omega = \pi \quad \text{ou} \quad r = a + R,$$

et alors

$$V = -\frac{4\pi R^2 e\delta}{a} = -\frac{M}{a},$$

en appelant M la masse de la couche.

La résultante F des actions exercées par la couche sur le point extérieur est évidemment dirigée vers le centre de la sphère, et, d'après ce qui précède, elle a pour valeur la dérivée de V par rapport à a ou

$$F = \frac{M}{a^2}.$$

L'attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur est donc égale à l'attraction exercée par un point matériel placé au centre de la sphère, ayant une masse égale à celle de la couche.

La généralisation est évidente pour une sphère homogène ou composée de couches concentriques homogènes.

Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point intérieur. — Si le point attiré A est placé à l'extérieur de la sphère, la constante C a une autre valeur. Si l'on remarque comme précédemment que $V = 0$ pour $\omega = 0$ ou $r = R - a$, on a

$$0 = -\frac{2\pi Re\delta(R-a)}{a} + C,$$

et par suite

$$V = -2\pi Re\delta\frac{r - R + a}{a}.$$

Pour la couche entière, $\omega = \pi$, $r = a + R$,

$$V = -4\pi Re\delta = -\frac{M}{R}.$$

Cette expression étant indépendante de a, la dérivée de V par rapport à a est nulle, et par suite $R = 0$; la couche n'exerce aucune action sur le point intérieur (*).

(*) La solution de ces deux derniers problèmes a fourni un exemple de l'usage de la fonction potentielle qui nous sera bientôt utile; mais on peut arriver aux mêmes résultats d'une manière plus directe.

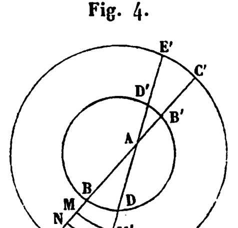
1° *Point intérieur.* — Au lieu de supposer l'épaisseur de la couche infi-

Distribution de l'électricité sur les corps conducteurs. — La solution de ce problème, au point de vue de la Phy-

---

niment petite, supposons l'épaisseur finie. Imaginons un cône infiniment délié, ayant pour sommet le point A ; décrivons du point A comme centre

Fig. 4.



trois sphères ayant pour rayons l'unité, $AM = r$, $AN = r + dr$. Le cône intercepte sur la première un élément superficiel ω, sur la seconde un élément superficiel $r^2\omega$; le volume infiniment petit MM'NN' a pour expression $r^2\omega dr$; il exerce sur A une action $\frac{r^2\omega dr.\delta}{r^2} = \omega dr.\delta$. Par suite, l'action exercée par le volume BDCE est égale à la somme des termes de la forme $\omega\delta dr$ quand on passe du point B au point C ou $\omega.\delta.BC$. De même l'action du volume B'C'D'E' sur A est égale à $\omega.\delta.B'C'$ et fait équilibre à la première. La démonstration s'applique évidemment au cas où la matière homogène serait distribuée entre deux ellipsoïdes homothétiques.

Cette démonstration simple est due à M. Chasles (Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, 1840). On trouve dans ce Mémoire de l'éminent géomètre la démonstration géométrique de cette propriété : la composante suivant une direction quelconque de l'attraction exercée sur un point est la dérivée par rapport à cette direction de la fonction potentielle. L'exposition géométrique des propriétés de la *fonction de force*, qui fait le sujet du présent article, n'est que l'extension de la démonstration donnée par M. Chasles.

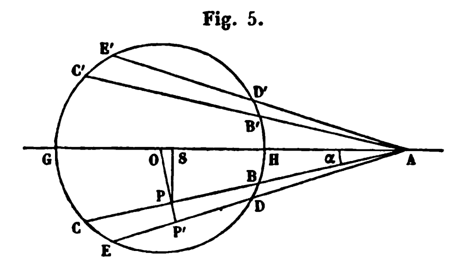
2° *Point extérieur.* — Menons par le point A situé à une distance du centre $OA = a$ deux droites qui fassent avec AO des angles α et $\alpha + d\alpha$, faisons tourner la figure autour de OA, et appelons F l'attraction exercée par le volume BHB'C'GC et dF l'accroissement de cette force relatif à l'accroissement $d\alpha$, c'est-à-dire l'attraction exercée par le volume BCDE B'C'D'E'. Chaque point pris à l'intérieur de la sphère exerce sur le point A une action qui peut se décomposer en deux autres, l'une dirigée suivant OA, l'autre perpendiculaire à OA ; la première composante est

sique mathématique, consiste à exprimer que la résultante des actions exercées par les molécules électrisées

---

seule à considérer, et dF est la résultante des composantes dirigées suivant OA relatives aux différentes parties du volume BCDEB'C'D'E'.

Fig. 5.



Pour évaluer ce volume, abaissons la perpendiculaire $OP = p$ sur la droite AC et appelons dp l'élément PP'; cet élément, en tournant autour de OA, engendre une surface égale à $PP' \times 2\pi . PS = 2\pi . p \cos\alpha . dp$. Si l'on décrit de A comme centre une sphère avec un rayon égal à l'unité, l'élément sphérique correspondant est $\omega = \frac{2\pi p . \cos\alpha . dp}{AP^2} = \frac{2\pi p dp}{a^2 \cos\alpha}$; l'action dF exercée suivant OA est, d'après ce qui précède,

$$\omega \times \delta \times BC \times \cos\alpha = \frac{2\pi p\, dp}{a^2} \delta \times BC\,;$$

d'ailleurs

$$BC = 2\sqrt{R^2 - p^2}\,; \quad dF = \frac{4\pi p (R^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} \delta}{a^2} dp.$$

Par suite,

$$\frac{dF}{dp} = \frac{4\pi p (R^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} \delta}{a^2},$$

F est donc la fonction primitive du second membre par rapport à p,

$$F = -\frac{4\pi (R^2 - p^2)^{\frac{3}{2}} \delta}{3a^2} + C\,;$$

la constante C se détermine en remarquant que $F = 0$ pour $p = 0$;

$$0 = -\frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{a^2}\delta + C, \quad F = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3 - (R^2 - p^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\delta\,;$$

on obtient l'action de la sphère entière en posant $p = R$, ce qui donne

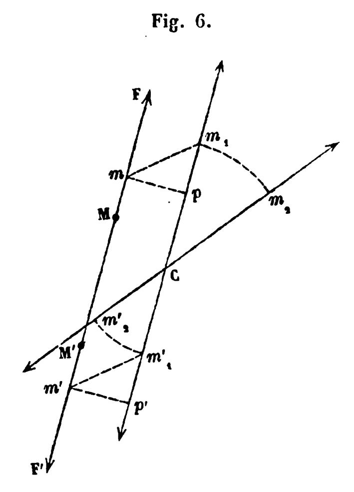
$$\frac{4}{3}\pi \frac{R^3 \delta}{a^2} = \frac{M}{a^2}.$$

Le même résultat s'applique à une couche sphérique qui peut être considérée comme la différence de deux sphères.

est nulle pour tout point pris à l'intérieur de chaque conducteur. Ces actions élémentaires étant définies par les lois de Coulomb, la condition précédente se traduit immédiatement ainsi : La fonction potentielle doit avoir une valeur constante pour tous les points pris à l'intérieur d'un même corps conducteur; cette fonction varie, en général, d'un conducteur à l'autre. Cette question comporte des développements analytiques considérables qui ne sauraient trouver place ici. Il suffira de remarquer que la fonction potentielle est nulle pour tout corps conducteur mis en communication avec le sol, puisque, dans ce cas, les distances deviennent infinies pour un point du sol.

Potentiel. — Soient M, M' deux points sollicités par des forces répulsives F, F' égales entre elles et dirigées

Fig. 6.



suivant la droite, $MM' = r$, qui les joint; supposons que les points s'éloignent l'un de l'autre, et prennent des po-

sitions m, m' infiniment voisines des positions M, M', la somme des travaux élémentaires des forces F et F' est

$$F \times Mm + F' \times M'm' = F\,dr,$$

en appelant $r + dr$ la nouvelle distance mm' des deux points. Si la droite mm' se transporte parallèlement à elle-même en $m_1 m'_1$, il est aisé de voir que la somme des travaux élémentaires des deux forces F, F', pour cette translation, doit être nulle, car si l'on abaisse des points m, m' des perpendiculaires sur $m_1 m'_1$, cette somme est

$$F' \times m'_1 p' - F \times m_1 p = 0.$$

Si l'on fait tourner cette droite $m_1 m_1$ autour d'un de ses points, les travaux des forces sont respectivement nuls, puisque les forces sont perpendiculaires aux chemins décrits par leurs points d'application.

Par suite, d'une manière générale, si ces deux points M, M', sollicités par les forces F, F', se déplacent de quantités infiniment petites d'une manière quelconque, la somme des travaux élémentaires relatifs à ce déplacement est $F\,dr$.

Supposons que F soit une force répulsive s'exerçant entre deux molécules électrisées dont les charges soient q, q'; F est proportionnelle à $\frac{qq'}{r^2}$, et le travail élémentaire $F\,dr = \frac{qq'}{r^2}\,dr = -\,d\left(\frac{qq'}{r}\right)$. Si, au lieu de considérer deux points M, M' d'un corps électrisé, on considère tous les points, la fonction $-\sum \frac{qq'}{r} = W$ jouit de la propriété suivante : l'accroissement infiniment petit de cette fonction est égal à la somme des travaux élémentaires des forces répulsives qui s'exercent entre les molécules électrisées lorsque ces molécules éprouvent des déplacements infi-

niment petits. Nous appellerons, avec M. Clausius, cette fonction W le *potentiel de l'électricité* (*).

Si l'on représente par W_0 le potentiel pour l'état initial du corps électrisé, par W_1 la nouvelle valeur du potentiel après une décharge partielle du corps électrisé, $W_1 - W_0$ est égal à la somme des travaux effectués par les forces répulsives mutuelles pendant la décharge incomplète du corps électrisé.

Ainsi, *le travail des actions mutuelles des molécules électrisées, dans la décharge, est égal à l'accroissement du potentiel de l'électricité.*

Expression du potentiel de l'électricité. — Soient q, q', q'',... les charges des molécules électrisées; considérons les actions de la première molécule sur les autres, les éléments correspondants du potentiel ont pour somme $-\sum \frac{qq'}{r}$, dans laquelle q est constant, ou par conséquent $-q\sum \frac{q'}{r}$, mais $\sum \frac{q'}{r}$ n'est autre chose que la fonction potentielle V relative au corps conducteur, la somme précédente est donc égale à $-qV$. De même, la somme des éléments du potentiel, relatif à l'action de la seconde molécule q' sur toutes les autres, est $-q'V$, et ainsi de suite.

La somme totale $-qV - q'V - \ldots = -(q + q' + \ldots)V$ est le double du potentiel, puisque l'on a considéré successivement l'action de q sur q', et celle de q' sur q; donc

$$2W = -QV \quad \text{ou} \quad W = -\frac{1}{2}VQ,$$

en appelant Q la charge totale du corps électrisé.

Par suite, pour un système de corps conducteurs, le

(*) Le potentiel de Gauss est la fonction potentielle de G. Green.

potentiel est la somme de termes semblables au précédent

$$W = -\frac{1}{2}\sum VQ.$$

Il est en général inutile d'ajouter une quantité constante au potentiel, car les effets d'une décharge électrique ne dépendent que de la variation du potentiel. Si l'on représente par o l'état initial d'un corps électrisé, par 1 l'état final, le travail effectué par les forces électriques pendant la décharge est

$$W_1 - W_0 = \frac{1}{2}(V_0 Q_0 - V_1 Q_1).$$

Cette relation donne lieu à plusieurs remarques :

1° Pour un conducteur électrisé considéré seul, la fonction potentielle $\sum \frac{q}{r}$ est proportionnelle à la charge, la distribution électrique étant indépendante de la quantité d'électricité; l'accroissement du potentiel est, dans ce cas, proportionnel à la diminution du carré de la charge électrique;

2° $W_1 - W_0$ est nul si le corps est en communication avec le sol; dans ce cas, la fonction potentielle est toujours nulle;

3° $W_1 - W_0$ est également nul, si le corps conducteur est uniquement soumis à l'influence; dans ce cas, la quantité d'électricité Q ou Q_1 est nulle;

4° Si la décharge est complète, $Q_1 = 0$; le travail effectué est égal à $\frac{1}{2} V_0 Q_0$.

Condensation électrique. — Soit S une source électrique, c'est-à-dire un corps conducteur qui puisse recevoir, quand on le voudra, une quantité déterminée d'électricité; comme cette charge est proportionnelle à la valeur de la fonction potentielle à l'intérieur de ce corps.

on peut la définir par la valeur de la fonction potentielle V.

Soient A et B les deux armatures d'un condensateur; mettons l'armature A en communication avec la source S par un fil très-long et très-fin. On peut négliger, sans inconvénient, la faible quantité d'électricité contenue sur le fil conducteur; de plus on peut considérer, dans la fonction potentielle de S, les éléments relatifs à l'action de A sur S comme étant négligeables, si le fil est suffisamment long, et réciproquement, dans l'expression de la fonction potentielle de A on pourra négliger, par la même raison, les termes qui correspondent à l'action de S sur A. L'électricité se partage entre A et S, la fonction potentielle diminue sur S et devient plus petite que V. Si l'on fournit de nouveau de l'électricité à S jusqu'à ce que la fonction potentielle devienne égale à V sur ce corps, la fonction potentielle acquiert la même valeur V sur le corps A, et l'armature A est chargée.

Approchons maintenant de A l'armature B mise en communication avec le sol; B est soumis à l'influence de A. Supposons que la distribution électrique ne soit pas modifiée sur A, et cherchons la valeur de la fonction potentielle sur ce conducteur A. Elle se compose de deux parties : la première, relative à l'action de l'électricité de A sur elle-même, conserve la même valeur V_a; la seconde, relative à l'action de B sur A, est de signe contraire à V_a, puisque les molécules de B attirent A, tandis que les molécules de A se repoussent mutuellement; on peut la représenter par $-V_b$, V_b étant de même signe que V_a. La fonction potentielle sur A est donc $V_a - V_b$, elle a diminué; A reçoit donc de l'électricité de S, mais si l'on fournit de nouveau de l'électricité à S, de manière à ramener sur ce corps la fonction potentielle à la valeur V; la fonction potentielle devient également V sur A, et

lorsque le condensateur est chargé à refus, en représentant par V'_a et V'_b les nouvelles valeurs des fonctions potentielles

$$V'_a - V'_b = V, \quad V'_a = V'_b + V.$$

Si la distribution électrique n'est pas modifiée sur A, V'_a et V sont proportionnels aux charges qui existent dans les deux expériences sur l'armature A et la force condensante ou le rapport de ces charges est

$$\frac{V'_a}{V} = 1 + \frac{V'_b}{V}.$$

La difficulté, uniquement analytique, de la théorie consiste donc dans l'expression de la fonction potentielle, qui dépend d'ailleurs du mode de distribution de l'électricité sur les deux armatures; ces difficultés disparaissent si l'on considère simplement une bouteille sphérique.

Bouteille de Leyde sphérique. — A est une sphère conductrice pleine ou une enveloppe sphérique creuse intérieurement, de rayon extérieur R; B est une enveloppe sphérique concentrique à A, mise en communication avec le sol par un fil très-fin, e est l'épaisseur de la couche isolante, $R + e$ est, par conséquent, le rayon intérieur de B.

Soient Q, Q' les charges des deux armatures intérieure et extérieure lorsque le condensateur est chargé à refus; si l'on se reporte à la valeur de la fonction potentielle dans le cas d'une sphère ou d'une couche sphérique homogène, on voit aisément que

$$V'_a = \frac{Q}{R}, \quad V'_b = \frac{Q'}{R + e},$$

et, par suite,

$$\frac{Q}{R} - \frac{Q'}{R + e} = V.$$

D'un autre côté, la fonction potentielle sur l'armature extérieure est $-\frac{Q}{R+e}+\frac{Q'}{R+e}$; mais cette fonction potentielle est nulle, puisque B communique avec le sol,

$$Q = Q' \ (*),$$

et, par suite,

$$Q = V.R\frac{R+e}{e}.$$

Si l'on suppose e très-petit par rapport à R, cette expression se réduit sensiblement à

$$Q = V\frac{R^2}{e}.$$

La charge que peut recevoir l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde en communication avec une source électrique déterminée, est donc *proportionnelle à la surface de l'armature et inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche isolante.*

Il est facile d'estimer la force condensante d'une bouteille sphérique. Si l'on appelle q la charge que recevrait l'armature intérieure mise en communication avec la source si l'armature B était éloignée,

$$\frac{q}{R} = V;$$

et la force condensante

$$\frac{Q}{q} = \frac{R+e}{e} = \frac{R}{e},$$

(*) Dans l'ancienne théorie du condensateur, la charge du plateau condensateur est supposée égale à une fraction m de la charge du plateau collecteur et la force condensante a pour expression $\frac{1}{1-m^2}$. Dans le cas qui nous occupe, les charges des deux armatures sont égales, $m = 1$, la force condensante serait alors infinie, résultat absurde.

si l'on suppose e très-petit, est *proportionnelle au rayon de la bouteille, et inversement proportionnelle à l'épaisseur du corps isolant* (*).

Décharge de la bouteille de Leyde sphérique. — Le travail effectué dans la décharge complète d'une bouteille

---

(*) Il est aisé de voir ce qui arriverait si l'armature extérieure de la bouteille n'était pas mise en communication avec le sol. Désignons par e' l'épaisseur de l'armature B limitée par deux sphères concentriques ayant pour rayons $R + e$, $R + e + e'$; désignons par Q_1 la charge de l'armature intérieure A lorsque l'appareil est chargé, par Q_2 la charge positive ou négative qui se trouve sur B. La fonction potentielle sur A est égale à V,

$$\frac{Q_1}{R} - \frac{Q_2}{R + e} + \frac{Q_2}{R + e + e'} = V.$$

Sur B la fonction potentielle est constante. Considérons un point de B situé à une distance x du centre commun des deux armatures,

$$\frac{Q_1}{x} - \frac{Q_2}{x} + \frac{Q_2}{R + e + e'} = \text{const.},$$

quelle que soit la position du point, quel que soit x par conséquent; ce qui exige $Q_1 = Q_2$. La charge Q_1 est alors donnée par la première équation

$$Q_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + e} + \frac{1}{R + e + e'} \right) = V,$$

$$Q_1 = \frac{V}{\frac{1}{R} - \frac{e'}{(R + e)(R + e + e')}}.$$

La force condensante

$$\frac{Q_1}{q} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} - \frac{e'}{(R + e)(R + e + e')}}.$$

Il est aisé de voir que cette expression augmente en même temps que e' et atteint sa valeur maximum $\frac{R + e}{e}$ pour $e' = \infty$, ce qui correspond au cas où l'armature B communique avec le sol.

La relation $Q_1 = Q_2$ montre que, si une boule électrisée est placée au centre d'une enveloppe sphérique conductrice, *la quantité d'électricité développée par influence sur cette enveloppe est égale à la quantité d'électricité de la boule inductrice;* la théorie rend ainsi compte d'une expérience de Faraday.

de Leyde est, comme nous l'avons vu,

$$-W = \frac{1}{2}VQ = \frac{1}{2}\frac{Q^2e}{R^2} = \frac{1}{2}V^2.\frac{R^2}{e}.$$

Il n'y a pas à tenir compte de l'armature extérieure, pour laquelle la fonction potentielle est nulle.

On voit que le travail effectué dans la décharge d'une bouteille de Leyde sphérique est *proportionnel au carré de la charge, à l'épaisseur de la couche isolante*, et *en raison inverse de la surface de la bouteille.*

On voit également que, pour une même source, l'effet que peut produire une pareille bouteille est *proportionnel à la surface de la bouteille et en raison inverse de son épaisseur.*

Le travail effectué pendant la décharge de la bouteille — W représente tous les effets mécaniques, dégagement de chaleur, actions chimiques, actions inductrices, etc. Dans le cas où le seul phénomène produit est un dégagement de chaleur, la quantité de chaleur dégagée est proportionnelle au travail — W.

Décharge d'une batterie. — Si l'on néglige, dans une batterie, les actions inductrices des bouteilles les unes sur les autres et l'action des fils de communication, si l'on suppose les bouteilles égales, la fonction potentielle a la même valeur V sur chacune des bouteilles. En appelant Q_1 la charge de la batterie, $\frac{Q_1}{n} = Q$ est la charge de chaque bouteille, quantité proportionnelle à V; le potentiel a pour valeur $W = -\frac{1}{2}VQ_1$ et le travail effectué dans la décharge de la bouteille est par conséquent proportionnel à $\frac{Q_1^2}{n}$, c'est-à-dire *proportionnel au carré de la charge et inversement proportionnel au nombre des bouteilles.*

Batterie chargée par cascade. — Supposons disposées en cascade diverses batteries formées de bouteilles égales entre elles, au nombre de n pour la première batterie, de n' pour la seconde,....

Admettons que les deux armatures de la première batterie contiennent des charges égales Q_1, il en sera nécessairement de même pour les batteries suivantes, et, d'après ce que l'on a vu pour une batterie, l'accroissement du potentiel, qui mesure le travail effectué dans la décharge de l'ensemble des batteries, sera proportionnel à

$$\frac{Q_1^2}{n} + \frac{Q_1^2}{n'} + \ldots = Q_1^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \ldots\right).$$

Décharge incomplète. — Une batterie composée de n bouteilles égales, dont chacune possède la charge $Q = \frac{Q_1}{n}$, est mise en communication avec une seconde batterie de n' bouteilles qui ne sont pas chargées. La charge Q_1 se répartit sur $n + n'$ bouteilles; la charge de chaque bouteille est $\frac{Q_1}{n + n'}$.

La décharge complète de la première batterie produirait un travail mesuré par $\frac{Q_1^2}{n}$, la décharge complète du système des deux batteries mises en communication produirait un travail proportionnel à $\frac{Q_1^2}{n + n'}$; le travail effectué dans la décharge incomplète, qui a eu lieu lorsque les deux batteries ont été mises en communication, est donc mesuré par

$$\frac{Q_1^2}{n} - \frac{Q_1^2}{n + n'} = Q_1^2 \cdot \frac{n'}{n(n + n')}.$$

M. Riess, en 1837 et 1838, dans des expériences disposées de façon que le phénomène calorifique fût à peu

près le seul produit dans la décharge, a trouvé expérimentalement toutes les lois qui précèdent. M. Helmholtz, en 1847, a donné la mesure du travail produit dans la décharge de la bouteille de Leyde. M. Clausius, en 1852, a donné la théorie complète des expériences de M. Riess.

Ouvrages à consulter :

Helmholtz. — *Mémoire sur la conservation de la force;* traduction Pérard.

Clausius. — *Théorie mécanique de la Chaleur;* traduction Folie. — *De la fonction potentielle et du potentiel;* traduction Folie.

Beer. — *Introduction à l'Électrostatique, à la théorie du Magnétisme et à l'Électrodynamique;* traduction van der Mensbrugghe, d'après l'édition Plücker.

Verdet. — *Théorie mécanique de la Chaleur*, publiée par Prudhon et Violle.

Briot. — *Théorie mécanique de la Chaleur.*

NOTE SUR LA THÉORIE DES RACINES;

Par M. J. BOURGET.

On peut partager la racine d'un nombre en deux parties de diverses manières, en dizaines et unités, en centaines et unités, etc.

Le théorème général qui donne la puissance de la somme de deux nombres permet d'appliquer à la recherche de chacune de ces parties des procédés uniformes, quel que soit le mode de partage. De plus, les méthodes abrégées ne sont qu'une application de ces procédés généraux. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette Note (*).

(*) Il est bien probable que la plupart de nos idées ne sont pas nouvelles; mais nous croyons faire une chose utile aux élèves en publiant dans les *Annales* un ensemble coordonné de toutes celles qui se rattachent à la racine carrée et à la racine cubique.

I. — *Racine carrée.*

Désignons par N le nombre entier dont nous extrayons la racine, et supposons que nous partagions la racine en mille et unités; désignons par a et b ces deux parties, la racine sera $1000a + b$ par défaut.

Théorème I. — *On obtient exactement les mille de la racine, en extrayant la racine du plus grand carré contenu dans les millions du nombre proposé.*

Démonstration. — Appelons A le nombre des millions de N et B le nombre des unités, de telle façon que l'on ait

$$N = 1000^2 A + B.$$

Si a désigne la racine du plus grand carré contenu dans A, on a

$$a^2 \leqq A < (a+1)^2,$$

par suite,

$$1000^2 a^2 \leqq 1000^2 A < 1000^2 (a+1)^2;$$

Mais les deux derniers nombres diffèrent au moins d'un million; donc on a encore

$$1000^2 a^2 \leqq 1000^2 A + B < 1000^2 (a+1)^2,$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$(1000a)^2 \leqq N < [1000(a+1)]^2.$$

La racine contient donc a mille et n'en contient pas $a+1$.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Désignons par* R *le reste obtenu en retranchant du nombre* N *le carré des mille de la racine, on obtient une limite supérieure du nombre des unités en divisant les mille du reste par le double des mille de la racine et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — Par hypothèse, nous avons

$$(1000a + b)^2 \leqq N;$$

en développant nous en déduisons

$$2000ab + b^2 \leqq N - 1000^2 a^2;$$

donc

$$2000ab < R;$$

donc aussi

$$b < \frac{R}{2000a}.$$

D'où l'on voit que b est au plus égal à la partie entière de ce quotient pris par défaut.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Pour faire la division de R par $2000a$, nous appliquerons le principe général de la division par un produit de facteur, par conséquent nous serons amenés à diviser les mille du reste par $2a$.

Remarque II. — Notre raisonnement suppose que b ne soit pas nul. S'il l'était, le reste serait tout au plus égal à $2000a$, d'après le théorème sur la différence des carrés de deux nombres consécutifs. Donc on sera averti que b est nul par l'opération même, quand le quotient $\frac{R}{2000a}$ sera l'unité exactement, ou sera moindre que l'unité.

Théorème III. — *On obtient une limite inférieure du nombre des unités en divisant les mille du reste* R *par le double des mille obtenus plus un, et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — 1° Le quotient obtenu par cette règle est inférieur à 1000.

En effet, on a, par hypothèse,

$$N < (1000a + b + 1)^2,$$

ou bien

$$N < 1000^2 a^2 + 2000a(b+1) + (b+1)^2;$$

donc

$$R < (b+1)(2000a + b + 1).$$

Mais b vaut au plus 999; donc on aura certainement

$$R < 1000(2000a + 1000);$$

de là on conclut

$$\frac{R}{1000(2a+1)} < 1000.$$

Donc la partie entière du quotient vaudra au plus 999.

C. Q. F. D.

2° Ce quotient réduit à sa partie entière par défaut est une limite inférieure du nombre des unités.

Désignons par q ce quotient pris par défaut, il viendra

$$\frac{R}{1000(2a+1)} \geqq q;$$

donc

$$N - 1000^2 a^2 \geqq 2000aq + 1000q;$$

mais 1000 étant supérieur à q, on aura certainement

$$N > 1000a^2 + 2000aq + q^2,$$

ou bien

$$N > (1000a + q)^2.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Notre raisonnement suppose q différent de zéro. Dans ce dernier cas, la racine est toute trouvée et le théorème devient inutile.

Théorème IV. — *Si le nombre des mille surpasse* 500, *les deux limites ne diffèrent pas d'une unité.*

Démonstration. — En effet, en désignant par δ cette différence, on a

$$\delta = \frac{R}{2000a} - \frac{R}{2000a + 1000} = \frac{1000R}{2000a \cdot 1000(2a+1)},$$

ou enfin

$$\delta = \frac{\left[\frac{R}{1000(2a+1)}\right]}{2a}.$$

Or le numérateur de δ est moindre que 1000 ; donc, si $a \geqq 500$, δ sera moindre qu'une unité. C. Q. F. D.

Théorème V. — *Si l'on a déjà obtenu plus de la moitié des chiffres d'une racine carrée, ou simplement la moitié, lorsque le premier chiffre vaut* 5 *ou plus de* 5, *on obtiendra à moins d'une unité la portion restante de la racine, si l'on divise par le double du nombre obtenu déjà les unités de même nature du reste, en prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — En effet, dans ce cas δ est inférieur à l'unité ; donc la première des divisions

$$\frac{R}{2000a}$$

donnera, si l'on prend le quotient q par défaut, soit le nombre b des unités, soit le nombre $b+1$, trop fort d'une quantité moindre qu'une unité. C. Q. F. D.

C'est la *méthode abrégée* de la racine carrée.

Corollaire I. — Désignons par q le quotient entier pris par défaut de la division

$$\frac{R}{2000a}$$

et par ρ le reste, le quotient q sera égal à b si $\rho \geqq q^2$, il sera égal à $b+1$ si $\rho < q^2$.

En effet, nous avons par hypothèse

$$\frac{R}{2000a} = q + \frac{\rho}{2000a};$$

donc

$$N - 1000^2a^2 = 2000aq + \rho;$$

par suite,

$$N = (1000a + q)^2 + \rho - q^2.$$

Cette égalité démontre le corollaire énoncé.

Corollaire II. — Dans le cas où q est égal à b, on voit que le reste final de l'opération est égal à la différence $\rho - q^2$.

II. — *Racine cubique.*

Conservons les mêmes notations que ci-dessus. Supposons encore que la racine cubique du nombre N soit décomposée en mille et unités; nous pourrons établir les théorèmes suivants :

Théorème I. — *On obtient exactement les mille de la racine cubique, en extrayant la racine du plus grand cube contenu dans les billions du nombre proposé.*

Démonstration semblable à celle qui a été donnée pour le cas de la racine carrée.

Théorème II. — *Désignons par* R *le reste obtenu en retranchant du nombre* N *le cube des mille de la racine. On obtient une limite supérieure du nombre des unités en divisant les millions du reste par le triple carré des mille obtenus et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration semblable à celle qui a été donnée pour le cas de la racine carrée.

Théorème III. — *On obtient une limite inférieure du nombre des unités en divisant les millions du reste par* $3a^2 + 3a + 1$ (a *représente le nombre des mille de la racine*) *et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — 1° Le quotient ainsi obtenu est inférieur à 1000. Nous avons en effet, par hypothèse,

$$N < (1000a + b + 1)^3,$$

ou bien

$$N < 1000^3 a^3 + 3.1000^2 (b+1) a^2 + 3.1000 (b+1) a + (b+1)^3;$$

donc

$$R < (b+1)[3.1000^2 a^2 + 3.1000 (b+1) a + (b+1)^2].$$

Mais b vaut au plus 999 ; donc on aura, en remplaçant b par cette valeur maximum,

$$R < 1000^3 (3a^2 + 3a + 1).$$

Par conséquent,

$$\frac{R}{1000^2(3a^2+3a+1)} < 1000.$$

Donc la partie entière de ce dernier quotient pris par défaut vaut au plus 999. C. Q. F. P.

2° Ce quotient pris par défaut est une limite inférieure du nombre des unités.

En effet, en le désignant par q, nous avons

$$\frac{R \text{ ou } (N - 1000^3 a^3)}{1000^2(3a^2+3a+1)} \geqq q;$$

donc

$$N \geqq 1000^3 a^3 + 3.1000^2 a^2 q + 3.1000^2 aq + 1000^2 q.$$

Mais, puisque 1000 est supérieur à q, on peut écrire

$$N > 1000^3 a^3 + 3.1000^2 a^2 q + 3.1000 aq^2 + q^3,$$

ou bien

$$N > (1000a + q)^3;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème IV. — *Si le nombre des mille a quatre chiffres ou plus, les deux limites ont une différence moindre qu'une unité.*

En effet,

$$\delta = \frac{R}{1000^2.3a^2} - \frac{R}{1000^2(3a^2+3a+1)};$$

donc, en réduisant,

$$\delta = \frac{R}{1000^2(3a^2+3a+1)} \cdot \frac{3a+1}{3a^2}.$$

Nous avons vu que la première fraction est inférieure à 1000, donc δ sera inférieur à l'unité si

$$\frac{3a^3}{3a+1} \geqq 1000,$$

ou si l'on a

$$3a^2 - 3000a - 1000 \geqq 0,$$

ou

$$a^2 - 1000a - \frac{1000}{3} \geqq 0.$$

Cette inégalité sera satisfaite, si l'on a

$$(a - 500)^2 - 501^2 \geqq 0,$$

ou bien

$$(a - 1001)(a + 1) \geqq 0.$$

Donc il suffit que a soit plus grand que 1000 pour que la condition soit satisfaite, comme nous l'avions énoncé.

Donc la différence entre les deux limites est inférieure à l'unité, quand le nombre des chiffres obtenus surpasse d'une unité au moins le nombre des chiffres à obtenir.

Théorème V. — *Quand on a obtenu plus de la moitié des chiffres d'une racine cubique, on obtient à moins d'une unité la partie restante, en divisant le reste par le triple carré de la partie obtenue et prenant le quotient par défaut.*

En effet, dans ce cas, le δ est inférieur à l'unité, par suite, le quotient, limite supérieure,

$$\frac{R}{1000^2.3a^2}$$

réduit à sa partie entière, prise par défaut donnera b ou $b+1$.

C'est la méthode abrégée d'extraction de la racine cubique.

Avec trois chiffres d'une racine, on passera à cinq, de là à neuf, de là à dix-sept, etc.

Corollaire. — Si nous désignons par q le quotient précédent et par ρ le reste, le quotient q représente b si $\rho \geqq q^2(3000a+q)$ et $b+1$ si $\rho < q^2(3000a+q)$.

En effet, par hypothèse,

$$N - 1000^3a^3 = 1000^2.3a^2.q + \rho;$$

donc

$$N = 1000^3a^3 + 3.1000^2.a^2q + 3.1000aq^2 + q^3$$
$$- 3.1000aq^2 - q^2 + \rho;$$

par suite,

$$N = (1000a + q)^3 + \rho - q^2(3000a + q).$$

Cette égalité démontre le corollaire. Nous voyons en même temps que si q représente b, le reste final de l'opération est

$$\rho - q^2(3000a + q).$$

Remarque. — On étendrait évidemment ces considérations aux racines de degrés supérieurs; mais cette généralisation n'aurait aucune utilité.

ÉTUDE ANALYTIQUE SUR LA CYCLIDE;

Par M. H. LEMONNIER.

Soit considérée l'enveloppe d'une sphère, quand le centre se meut sur une conique et que le rayon est proportionnel à la distance du centre à une droite D située dans le plan de la conique.

Prenons pour la conique, les coordonnées étant rectangulaires, les équations

$$\gamma = 0, \quad \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} = 1;$$

pour la droite fixe,

$$z = 0, \quad mx + ny + p = 0;$$

et pour la sphère mobile,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = (m\alpha + n\beta + p)^2.$$

On déduit de là, à l'égard de l'enveloppe,

$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta + (m\alpha + n\beta + p)(m\,d\alpha + n\,d\beta) = 0,$$

$$\frac{\alpha}{A}\,d\alpha + \frac{\beta}{B}\,d\beta = 0,$$

ce qui donne pour déterminer la surface

$$\frac{x - \alpha + m(m\alpha + n\beta + p)}{\frac{\alpha}{A}} = \frac{y - \beta + n(m\alpha + n\beta + p)}{\frac{\beta}{B}},$$

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} = 1, \quad (x-a)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = (m\alpha + n\beta + p)^2.$$

Voyons à quelles conditions les plans des intersections successives passent par une même droite D'.

L'équation générale du plan d'une caractéristique peut se mettre sous la forme

$$\frac{(x+mp)\mathrm{A}}{\alpha}+(m^2-1)\mathrm{A}+mn\mathrm{A}\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=\frac{(y+np)\mathrm{B}}{\beta}+(n^2-1)\mathrm{B}+mn\mathrm{B}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Pour que le plan passe par une droite fixe, il faudra d'abord avoir

$$mn=0,$$

d'où, soit

$$m=0,$$

soit

$$n=0.$$

Si l'on prend $n=0$, il faudra, en outre, que

$$(m^2-1)\mathrm{A}=-\mathrm{B} \quad \text{ou} \quad m^2=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}},$$

et alors la droite commune est donnée par

$$x+mp=0, \quad y=0.$$

Si l'on prend $m=0$, il faut

$$-\mathrm{A}=(n^2-1)\mathrm{B}, \quad \text{d'où} \quad n^2=\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}},$$

et alors on a pour la droite

$$x=0, \quad y+np=0.$$

Quand la conique est une ellipse, si l'on a $\mathrm{A}>\mathrm{B}$, il faudra donc prendre

$$n=0, \quad m^2=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

Quand c'est une hyperbole pour laquelle on a $\mathrm{A}>0$,

$B < o$, il y aura à prendre soit

$$n = o, \quad m^2 = \frac{A - B}{A},$$

soit

$$m = o, \quad n^2 = \frac{B - A}{B}.$$

D'après cela, lorsque la directrice du centre est une ellipse, la droite doit être perpendiculaire à l'axe focal, et le rapport m du rayon de la sphère à la distance entre son centre et la droite fixe doit être l'excentricité de l'ellipse.

Lorsque la directrice est une hyperbole, la droite fixe doit être perpendiculaire à l'un de ses axes. Si elle l'est à l'axe focal, le rapport est l'excentricité de l'hyperbole. Si elle est perpendiculaire à l'axe non focal, le rapport est l'excentricité de l'hyperbole conjuguée; mais, dans ce cas, on verra plus loin que la surface devient imaginaire.

Supposons d'abord

$$n = o, \quad m^2 = \frac{A - B}{A}, \quad A > B.$$

Nous aurons pour la surface

$$\frac{x - \alpha + m(m\alpha + p)}{\frac{\alpha}{A}} = \frac{y - \beta}{\frac{\beta}{B}},$$

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} = 1; \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (m\alpha + p)^2;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x + mp}{\frac{\alpha}{A}} = \frac{y}{\frac{\beta}{B}} \frac{\sqrt{A}(x + mp)}{\frac{\alpha}{\sqrt{A}}} = \frac{\sqrt{B}y}{\frac{\beta}{\sqrt{B}}} = \frac{\sqrt{A(x + mp)^2 + By^2}}{1},$$

de sorte que

$$\alpha = \frac{A(x+mp)}{\sqrt{A(x+np)^2+By^2}}, \quad \beta = \frac{By}{\sqrt{A(x+mp)^2+By^2}}.$$

Et l'on a

$$x^2+y^2+z^2-p^2+\frac{B}{A}\alpha^2+\beta^2-2(mp\alpha+\alpha x+\beta y)=0;$$

par suite,

$$x^2+y^2+z^2-p^2+B\frac{A(x+mp)^2+By^2}{A(x+mp)^2+By^2}$$
$$-2\frac{A(x+mp)^2+By^2}{\sqrt{A(x+mp)^2+By^2}}=0,$$

c'est-à-dire

$$x^2+y^2+z^2-p^2+B=2\sqrt{A(x+mp)^2+By^2},$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2-p^2+B)^2=4[A(x+mp)^2+By^2],$$

équation d'une grande simplicité, sous une forme heureuse.

Points de rencontre de la surface avec la droite $(z=0, mx+p=0)$, *et avec la droite* $(y=0, x+mp)=0$.

L'on a pour la première

$$\left(\frac{B}{A}\frac{p^2}{m^2}+B+y^2\right)^2=4\left(\frac{B}{A}\frac{p^2}{m^2}+y^2\right)B,$$

d'où

$$\left(\frac{B}{A}\frac{p^2}{m^2}+y^2-B\right)^2=0, \quad y^2=B\frac{A-B-p^2}{A-B};$$

de sorte que si l'on a $B>0$, la droite rencontre ou non la surface suivant que l'on a

$$A-B>p^2$$

ou

$$A - B < p^2;$$

et quand on a $B < o$, suivant que l'on a, au contraire,

$$A - B < p^2$$

ou

$$A - B > p^2.$$

A l'égard de la seconde droite, il vient

$$(mp^2 + z^2 - p^2 + B)^2 = o,$$

d'où

$$z^2 = \frac{B}{A}(p^2 - A),$$

Quand on a $B > o$, si p^2 est $< A - B$, on a *à fortiori* $p^2 < A$, et si p^2 est $> A - B$, on peut avoir $p^2 < A$ ou $p^2 > A$.

Quand on a $B < o$, si p^2 est $> A - B$, on a $p^2 > A$, et si p^2 est $< A - B$, on aura $p^2 > A$ ou $< A$.

D'après quoi, les deux droites ne coupent jamais à la fois la surface. Que l'une la coupe, l'autre ne le fait pas; toutes deux peuvent ne pas la rencontrer.

Sections de la surface par les plans menés suivant la droite D.

Portons l'origine à la rencontre de la droite avec l'axe des x. Les formules à employer seront

$$x = -\frac{p}{m} + x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1;$$

il s'ensuit

$$\left(x_1^2 - \frac{2p}{m}x_1 + y_1^2 + z_1^2 + \frac{p^2}{m^2}\frac{B}{A} + B\right)^2$$
$$= 4\left[A\left(x_1 - \frac{B}{A}\frac{p}{m}\right)^2 + By^2\right].$$

Soit $z_1 = x_1 \operatorname{tang}\omega$ l'équation d'un plan sécant. En prenant pour nouvel axe des x sa trace sur le plan des zx, on aura à l'égard de la section

$$z_1 = x_2 \cos\omega, \quad z_1 = x_2 \sin\omega, \quad z = o,$$

$$\left(x_2^2 + y_2^2 - \frac{2p}{m} x_2 \cos\omega + \frac{p^2}{m^2}\frac{B}{A} + B\right)^2$$
$$= 4\left[A\left(x_2 \cos\omega - \frac{B}{A}\frac{p}{m}\right)^2 + By^2\right],$$

d'où

$$y_2^2 + x_2^2 - 2\left(\frac{p}{m}\cos\omega \pm \sqrt{A\cos^2\omega - B}\right)x_2 + \frac{B}{m^2 A}(p^2 - Am^2) = o,$$

ou

$$y_2^2 + \left(x_2 - \frac{p}{m}\cos\omega \mp \sqrt{A\cos^2\omega - B}\right)^2$$
$$= \left(\frac{p\sqrt{A\cos^2\omega - B}}{m\sqrt{A}} \pm \sqrt{A}\cos\omega\right)^2.$$

Donc la section est le système de deux cercles ayant la droite D pour axe radical, cercles réels tant que l'on a

$$A\cos^4\omega - B < o.$$

La section serait imaginaire, quel que fût ω, si l'on avait $A < B$. La surface serait donc alors imaginaire.

Il n'y a pas lieu, en conséquence, d'attribuer à m et à p des valeurs telles que $m = \mu i$, $p = \varpi i$, si l'on suppose $A > o$ et $B > o$, car $\frac{A - B}{A}$ ne saurait être négatif.

Si, en supposant $B > o$, on prenait $A < o$, on aurait bien $\frac{A - B}{A} = m^2 > o$; la droite D serait perpendiculaire à l'axe non focal de l'hyperbole; mais la surface serait imaginaire, puisqu'on aurait alors $B > A$. Ce cas revient à l'hypothèse considérée de $m = o$, $n^2 = \frac{B - A}{B}$ pour

$B < o$. C'est donc, comme on l'a annoncé, une hypothèse à rejeter.

Ainsi, pour que la surface soit réelle, il faut que la droite D soit perpendiculaire à l'axe focal de la conique, et les sections de la surface par des plans menés suivant cette droite sont des couples de cercles ayant la droite pour axe radical commun.

Sections de la surface par des plans menés suivant la droite D'.

Un plan passant par D' ayant pour équation

$$x + mp = \lambda y,$$

on aura pour la section

$$(x^2 + y^2 + z^2 - p^2 + B)^2 = 4(A\lambda^2 + B)y^2,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 - p^2 + B = \pm 2y\sqrt{A\lambda^2 + B},$$

$$x^2 + (y \mp \sqrt{A\lambda^2 + B})^2 + z^2 = A\lambda^2 + p^2.$$

La section sera donc le système de deux cercles à la fois réels ou imaginaires conjugués.

Elle sera réelle si la distance du centre au plan est moindre que le rayon, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{mp \mp \lambda\sqrt{A\lambda^2 + B}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right)^2 \leqq A\lambda^2 + p^2,$$

d'où

$$[p\sqrt{A\lambda^2 + B} \mp \lambda\sqrt{A(A - B)}]^2 \geqq o,$$

ce qui a lieu pour toute valeur de λ, si l'on a $B > o$, $A > o$, $A - B > o$: et pour $\lambda^2 \geqq -\frac{B}{A}$, si l'on a $B < o$, $A > o$.

L'équation (1) de la surface peut se transformer en

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-p^2+B)^2 &- 4[A(x+mp)^2+By^2] \\ &+ 4[A(mx+p)^2-Bz^2] \\ = 4[A(x+mp)^2-Bz^2],\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-p^2+B)^2 &- 4B(x^2+y^2+z^2-p^2) \\ = 4[A(x+mp)^2-Bz^2],\end{aligned}$$

$$(2)\quad (x^2+y^2+z^2-p^2-B)^2 = 4\left[(A-B)\left(x+\frac{p}{m}\right)^2 - Bz^2\right].$$

En partant de cette forme, on pourrait procéder d'une manière semblable à celle que nous venons de suivre pour les sections par des plans menés suivant la droite D.

Sphères inscrites à la surface suivant les cercles dont la droite D *est l'axe radical.*

L'équation (1) étant celle de l'enveloppe d'une sphère dont l'équation générale est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=(m\alpha+p)^2,$$

quand on a

$$\frac{\alpha^2}{A}+\frac{\beta^2}{B}=1 \quad \text{et} \quad m^2=\frac{A-B}{A},$$

on voit immédiatement que l'équation (2) est celle de l'enveloppe d'une sphère qui a pour équation générale

$$(x-\lambda)^2+y^2+(z-\nu)^2=m'^2(\lambda+mp)^2,$$

si l'on a

$$\frac{\lambda^2}{A-B}+\frac{\nu^2}{-B}=1 \quad \text{et} \quad m'^2=\frac{A}{A-B}.$$

Donc la surface est l'enveloppe d'une sphère dont le

centre décrirait dans le plan xz la conique représentée par

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{A - B} - \frac{z^2}{B} = 1,$$

et dont le rayon serait dans un rapport constant égal à l'excentricité de cette conique avec la distance du centre à la droite qui a pour équations

$$y = 0, \quad x + mp = 0.$$

Or cette droite est D', et, d'après la première génération, les plans des intersections successives de la seconde sphère mobile se coupent suivant la droite D.

Les deux coniques sont d'ailleurs focales l'une de l'autre.

D'après cela, soient considérées deux coniques focales l'une de l'autre, et respectivement dans leurs plans, deux droites D, D' perpendiculaires à leur axe commun, telles que le centre des coniques en soit à des distances dont le rapport égale l'excentricité de l'hyperbole, si l'on prend pour la première distance celle qui concerne la droite placée dans le plan de l'ellipse. Imaginons une sphère dont le centre parcourt l'une des coniques, tandis que son rayon et la distance du centre à celle des droites D et D' qui est dans le plan de cette conique sont dans un rapport constant égal à l'excentricité de la conique; puis une seconde sphère, dans des conditions analogues, dont le centre parcourt la seconde conique. Les deux sphères présentent la même enveloppe, et de chaque côté les intersections successives seront des cercles ayant pour axe radical commun la droite située dans le plan de leurs centres.

Les sphères inscrites à la surface suivant les cercles dont les plans se coupent suivant la droite D se déterminent encore assez simplement comme il suit :

L'équation (2) de la surface

$$(x^2+y^2+z^2-p^2-B)^2=4\left[(A-B)\left(x+\frac{p}{m}\right)^2-Bz^2\right]$$

pourra se mettre sous la forme

$$(x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\nu z-\rho)(x^2+y^2+z^2-2\lambda' x-2\nu' z-\rho')$$
$$=q[mz\cos\omega-(mx+p)\sin\omega]^2,$$

si les deux équations

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(p^2+B)(x^2+y^2+z^2)+(p^2+B)^2$$
$$=4(A-B)x^2-4Bz^2+8(A-B)\frac{p}{m}x+4(A-B)\frac{p^2}{m^2},$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2\left[(\lambda+\lambda')x+(\nu+\nu')z+\frac{\rho+\rho'}{2}\right](x^2+y^2+z^2)$$
$$+(2\lambda x+2\nu z+\rho)(2\lambda' x+2\nu' z+\rho')$$
$$=q[mz\cos\omega-(mx+p)\sin\omega]^2$$

peuvent s'identifier, c'est-à-dire si l'on peut avoir à la fois

$$\lambda+\lambda'=0,\quad \nu+\nu'=0,\quad \rho+\rho'=2(p'+B),$$
$$-4\lambda\lambda'+qm^2\sin^2\omega=4(A-B),$$
$$-4\nu\nu'+qm^2\cos^2\omega=-4B,$$
$$4(\lambda\nu'+\nu\lambda')=-2qm^2\sin\omega\cos\omega,$$
$$-2\lambda\rho'-2\lambda'\rho+2mpq\sin^2\omega=8(A-B)\frac{p}{m},$$
$$2\nu\rho'-2\nu'\rho+2mpq\sin\omega\cos\omega=0,$$
$$-\rho\rho'+qp^2\sin^2\omega=4(A-B)\frac{p^2}{m^2}-(p^2+B)^2.$$

On tire de là

$$\lambda'=-\lambda,\quad \mu'=-\mu,\quad qm^2\sin^2\omega=4(A-B)-4\lambda^2,$$
$$qm^2\cos^2\omega=-4B-4\mu^2,$$

d'où

$$qm^2 = 4(A - 2B) - 4(\lambda^2 + \mu^2),$$

$$-16(A - B - \lambda^2)(B + \nu^2) = 16\lambda^2\nu^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda^2}{A - B} - \frac{\nu^2}{B} = 1,$$

$$2\nu[2(p^2 + B) - \rho] - 2\nu\rho + 4\frac{p}{m}2\lambda\nu = 0,$$

$$\rho = p^2 + B + \frac{2p}{m}\lambda, \quad \rho' = p^2 + B - \frac{2p}{m}\lambda,$$

expressions qui vérifient

$$-2\lambda\rho' - 2\lambda'\rho + 2mpq\sin^2\omega = 8(A - B)\frac{p}{m},$$

$$-\rho\rho' + qp^2\sin^2\omega = 4(A - B)\frac{p^2}{m^2} - (p^2 + B)^2.$$

La valeur de qm^2 peut se transformer en

$$qm^2 = -4\left(\frac{A - B}{B}\nu^2 + \frac{B}{A - B}\lambda^2\right),$$

et l'on a

$$\text{tang}^2\omega = \frac{\lambda^2 - (A - B)}{B + \nu^2}.$$

Donc l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - 2\nu z - p^2 - B - \frac{2p}{m}\lambda\right)$$
$$\times\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + 2\nu z - p^2 - B + \frac{2p}{m}\lambda\right)$$
$$= 4\left(\frac{A - B}{B}\nu^2 + \frac{B}{A + B}\lambda^2\right)\left[z\cos\omega - \left(x + \frac{p}{m}\right)\sin\omega\right]^2,$$

pourvu qu'on ait

$$\frac{\lambda^2}{A - B} - \frac{\nu^2}{B} = 1 \quad \text{et} \quad \text{tang}^2\omega = \frac{\lambda^2 - (A - B)}{B + \nu^2};$$

ce qui accuse que chacune des sphères données par les

équations

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\nu z-p^2-B-\frac{2p}{m}\lambda=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda x+2\nu z-p^2-B+\frac{2p}{m}\lambda=0,$$

est tangente à la surface suivant son intersection par le plan

$$z\cos\omega-\left(x+\frac{p}{m}\right)\sin\omega=0.$$

On a d'ailleurs pour le rayon de la première sphère

$$r^2=\lambda^2+\nu^2+p^2+B+\frac{2p}{m}\lambda=\frac{A}{A-B}(\lambda+mp)^2.$$

Les faits précédemment constatés se retrouvent ainsi.

Dans la surface que nous venons d'étudier, les deux séries de cercles sont des lignes de courbure. Cette surface est donc une cyclide.

Quand des cyclides sont parallèles, les sphères qui leur sont inscrites suivant leurs lignes de courbure ont les mêmes centres. En conséquence, étant données deux coniques focales l'une de l'autre, si l'on fait varier dans le plan de l'une une droite D perpendiculairement à l'axe commun, les surfaces cyclides correspondantes sont parallèles; et toutes les cyclides parallèles à une première peuvent ainsi être considérées comme dérivant d'un même système de coniques focales, quand on fait varier les axes radicaux relatifs à leurs lignes de courbure.

Comme circonstance limite, les deux coniques peuvent être deux paraboles focales l'une de l'autre.

Quand sur une surface les lignes de courbure d'une série sont circulaires et les autres planes, on sait que les plans de ces dernières passent par une même droite qui est le lieu des sommets des cônes circonscrits à la surface

suivant les premières lignes. En vérifiant pour notre surface que les plans tangents le long d'une caractéristique sur la sphère mobile concourent en un même point sur l'axe radical des lignes de l'autre série, on trouve que ce point est sur la tangente à la conique directrice au centre même de la sphère. Cette particularité, qui, au reste, se rattache à un fait plus général indiqué par M. Bonnet dans son Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques, donne une nouvelle génération de la cyclide. Elle en fait le lieu du cercle de contact de la sphère mobile et d'un cône circonscrit ayant son sommet à la rencontre de la droite directrice et de la tangente menée à la conique directrice par le centre de la sphère : point de vue qui peut trouver son application dans la géométrie descriptive.

Pour faire la vérification dont nous venons de parler, considérons l'équation

$$(x^2+y^2+z^2-p^2+B)^2=4[A(x+mp)^2+By^2].$$

On aura pour le plan tangent

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-p^2+B)(Xx+Yy+Zz-p^2+B)\\ =2A(x+pm)(X+mp)+2BYy+2[A(x+mp)^2+By^2].\end{aligned}$$

Le plan de la caractéristique est donné par

$$\frac{x+mp}{\frac{\alpha}{A}}=\frac{y}{\frac{\beta}{B}}=\sqrt{A(x+mp)^2+By^2},$$

de sorte qu'on a pour les points de cette ligne

$$x^2+y^2+z^2-p^2+B=\pm\frac{2By}{\beta};$$

mais pour avoir $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=(m\alpha+p)^2$

il y a à prendre

$$x^2+y^2+z^2-p^2+B=\frac{2By}{\beta}.$$

Il s'ensuit que l'équation du plan tangent se réduit à

$$Xx+Yy+Zz-p^2+B=\alpha(X+mp)+\beta Y+\frac{By}{\beta}.$$

Si l'on y fait $Z=0$, $mX+p=0$, il vient

$$-\frac{p}{m}x+Yy-p^2+B=\alpha\left(-\frac{p}{m}+mp\right)+\beta Y+\frac{By}{p},$$

d'où

$$Y=\frac{B}{\beta}\left(1+\frac{p\alpha}{mA}\right),$$

ce qui se rapporte à la rencontre de la droite D et de la tangente à la conique directrice en $(\alpha\beta)$.

EXERCICES.

1. Les deux tangentes menées d'un même point à une conique, sont entre elles comme les normales correspondantes.

Les droites qui joignent l'origine de deux tangentes aux pieds de leurs normales respectives, sont également inclinées sur ces tangentes. (G. Dostor.)

2. Si l'on mène deux tangentes à la parabole :

1° L'abscisse de leur point d'intersection est *moyenne géométrique* entre les abscisses des deux points de contact ;

2° L'ordonnée du point d'intersection est *moyenne*

arithmétique entre les ordonnées des deux points de contact. (G. Dostor.)

3. Lorsqu'on joint au centre O de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

le point de contact M d'une tangente et un autre point quelconque P, (x', y') de cette tangente, la double surface du triangle résultant OMP est exprimée par

$$\sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}.$$

(G. Dostor.)

4. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le produit des deux distances d'une normale à son pôle et au centre de la courbe est égal au produit des deux rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact. (G. Dostor.)

5. Si les deux tangentes menées du point P ou (x, y) à une conique à centre O, touchent, par exemple, l'ellipse

$$a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2 = 0,$$

en M', M'', on a

$$\text{le triangle OM'M''} = \frac{a^2b^2(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2y^2 + b^2x^2},$$

$$\text{le triangle PM'M''} = \frac{(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2y^2 + b^2x^2},$$

$$\text{le quadrilatère OM'PM''} = (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)^{\frac{1}{3}}.$$

(G. Dostor.)

6. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, les deux droites qui joignent un point quelconque de la courbe aux extrémités d'un diamètre, divisent le diamètre conjugué en parties harmoniques. (G. Dostor.)

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LE BESGUE.

La communication si bienveillante faite par M. Catalan à M. Gerono d'une vieille lettre que j'avais complétement oubliée, m'engage à démontrer directement la formule suivante.

THÉORÈME. — *Si l'on pose*

$$(a)\qquad a^2(p^2-3q)+a(pq-9r)+q^2-3pr=0,$$

l'équation

$$(1)\qquad x^3+px^2+qx+r=0$$

sera résolue par la formule

$$(A)\quad 3x+p=\sqrt[3]{(p^2-3q)(3a+p)}-\frac{p^2-3q}{\sqrt[3]{(p^2-3q)(3a+p)}}.$$

Démonstration. — L'équation (1) peut être mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{3}\right)^3+\left(q-\frac{p^2}{3}\right)x-\frac{p^3}{27}+r=0,$$

et, quand on admet la condition

$$p^2=3q,$$

il vient

$$(3x+p)^3=p^3-27r=u^3;$$

d'où

$$x=\frac{u-p}{3}\quad \text{et}\quad \frac{1}{x}=\frac{3}{u-p}=\frac{3(u^2+up+p^2)}{u^3-p^3},$$

ou

$$(B)\qquad \frac{1}{x}=-\frac{u^2+up+p^2}{9r}.$$

Si l'équation (1) est mise sous la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{q}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{p}{r}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{r} = 0,$$

et que l'on admette la condition

$$(3) \qquad \frac{q^2}{r^2} = 3\frac{p}{r} \quad \text{ou} \quad q^2 = 3pr,$$

en changeant dans (B) x en $\frac{1}{x}$, p, q, r en $\frac{q}{r}$, $\frac{p}{r}$, $\frac{1}{r}$, la formule (B) devient, réduction faite,

$$(C) \qquad 3x + p = \sqrt[3]{(3q - p^2)p} - \frac{3q - p^2}{\sqrt[3]{(3q - p^2)p}},$$

comme on le trouve en éliminant r au moyen de la condition (3).

Cela posé, si (1) ne donne pas la condition (3), on fera $x = y + a$, et l'équation (1) deviendra

$$(4) \qquad y^3 + p'y^2 + q'y + r' = 0,$$

ou

$$p' = 3a + p, \quad q' = 3a^2 + 2ap + q, \quad r' = a^3 + pa^2 + qa + r;$$

d'où l'on tire

$$3q' - p'^2 = 3q - p^2,$$
$$q'^2 - 3p'r' = (p^2 - 3q)a^2 + (pq - 9r)a + q^2 - 3pr;$$

de sorte que l'équation (a) établit la condition

$$q'^2 = 3p'r'.$$

La formule (C) devient alors

$$3y + p' = \sqrt[3]{(3q' - p'^2)p'} - \frac{3y' - p'^2}{\sqrt{(3q' - p'^2)}},$$

qui revient à

$$3x + p = \sqrt[3]{(3q - p^2)(3a + p)} - \frac{3q - p^2}{\sqrt[3]{(3q - p^2)(3a + p)}}.$$

La discussion de cette formule paraît moins facile que celle de la formule ordinaire.

ÉQUATION DE HESSE

pour la détermination des points d'inflexion;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille.

Soit $u=0$ l'équation d'une ligne quelconque, u étant une fonction homogène de x, y et $z=1$, d'un degré égal à k.

Si un point d'inflexion y est donné par $y''=0$, u'_x, u'_y, et u''_{x^2}, u''_{xy}, u''_{y^2} étant, en ce point, de valeurs finies, on aura

$$u=0,\quad u'_x+y'u'_y=0\quad \text{et}\quad u''_{x^2}+2u''_{xy}y'+u''_{y^2}y'^2=0,$$

ou

$$u=0,\quad u'_x+mu'_y=0,\quad u''_{x^2}+2mu''_{xy}+m^2u''_{yz}=0,$$

en posant $y'=m$.

En tenant compte des identités

$$(k-1)u'_x=xu''_{x^2}+yu''_{xy}+zu''_{xz},\ldots,$$

$$\begin{aligned}ku&=xu'_x+yu'_y+zu'_z\\&=x^2u''_{x^2}+y^2u''_{y^2}+z^2u''_{z^2}+2yzu''_{yz}+2zxu''_{zx}+2xyu''_{xy},\end{aligned}$$

ces équations seront

$$x^2u''_{x^2}+y^2u''_{y^2}+z^2u''_{z^2}+2yzu''_{yz}+2zxu''_{zx}+2xyu''_{xy}=0,$$

$$xu''_{x^2}+yu''_{xy}+zu''_{xz}+m\left(xu''_{xy}+yu''_{y^2}+zu''_{yz}\right)=0,$$

$$u''_{x^2}+2mu''_{xy}+m^2u''_{y^2}=0.$$

Or elles expriment que le point (xy) est à la fois sur la conique que représente l'équation

$$\varphi(X, Y, Z) = X^2 u''_{x^2} + Y^2 u''_{y^2} + Z^2 u''_{z^2} + 2YZ u''_{yz} + 2ZX u''_{zx} + 2XY u''_{xy} = 0,$$

et sur une asymptote de cette conique donnée par

$$X u''_{x^2} + Y u''_{xy} + Z u''_{xz} + m(X u''_{xy} + Y u''_{y^2} + Z u''_{yz}) = 0,$$
$$u''_{x^2} + 2u''_{xy} m + u''_{y^2} m^2 = 0.$$

Il s'ensuit que la conique est le système de deux droites. Son centre lui appartenant alors, on a pour ce centre

$$\varphi'_X = 0, \quad \varphi'_Y = 0, \quad \varphi'_Z = 0,$$

d'où l'équation de Hesse :

$$\begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Si u est une fonction entière du degré n, cette équation est du degré $3(n-2)$. Le nombre des points d'inflexion est alors, en général, $3n(n-2)$.

SOLUTION D'UNE QUESTION GÉOMÉTRIQUE;

Par M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille.

Un cône du second degré étant donné par son sommet et une section plane, en construire les axes au moyen de coniques.

1. Soient considérés des surfaces homofocales et les cônes circonscrits à ces surfaces d'un même sommet $P(x_1 y_1 z_1)$.

L'une des surfaces ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1,$$

si le point $M(xyz)$ est la trace, sur le plan polaire de P, d'un axe du cône circonscrit à la surface, on aura les équations

$$\frac{x-x_1}{\dfrac{x}{a^2+u}}=\frac{y-y_1}{\dfrac{y}{b^2+u}}=\frac{z-z_1}{\dfrac{z}{c^2+u}},$$

$$\frac{xx_1}{a^2+u}+\frac{yy_1}{b^2+u}+\frac{zz_1}{c^2+u}-1=0,$$

puisque la droite PM est perpendiculaire au plan polaire de M par rapport au cône, et que ce plan est le plan polaire par rapport à la surface.

L'élimination de u entre les deux premières équations donne

$$\frac{a^2-b^2}{\dfrac{x}{x-x_1}-\dfrac{y}{y-y_1}}=\frac{b^2-c^2}{\dfrac{y}{y-y_1}-\dfrac{z}{z-z_1}},$$

d'où

$$\frac{(b^2-c^2)x_1}{x-x_1}+\frac{(c^2-a^2)y_1}{y-y_1}+\frac{(a^2-b^2)z_1}{z-z_1}=0.$$

Cette équation est celle du cône des normales menées par le point P aux surfaces considérées, et à celles qui leur sont homothétiques et concentriques.

On tire des mêmes équations, en ayant égard à la troisième,

$$\frac{x-x_1}{\dfrac{x}{a^2+u}}=\frac{y-y_1}{\dfrac{y}{b^2+u}}=\frac{z-z_1}{\dfrac{z}{c^2+u}}$$

$$=\frac{x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)}{1}$$

$$=\frac{a^2+u}{\left(\dfrac{x}{x-x_1}\right)}=\frac{b^2+u}{\left(\dfrac{y}{y-y_1}\right)}=\frac{(a^2-b^2)(x-x_1)(y-y_1)}{x_1(y-y_1)-y_1(x-x_1)};$$

de sorte qu'on a

$$[x_1(y-y_1)-y_1(x-x_1)][x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)]$$
$$=(a^2-b^2)(x-x_1)(y-y_1),$$

ce qui donne un second cône contenant les mêmes axes.

On en a deux autres analogues par les équations

$$[y_1(z-z_1)-z_1(y-y_1)][x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)]$$
$$=(b^2-c^2)(y-y_1)(z-z_1),$$
$$[z_1(x-x_1)-x_1(z-z_1)][x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)]$$
$$=(c^2-a^2)(z-z_1)(x-x_1).$$

Ces cônes ne changent pas quand on passe d'une surface à une surface homofocale.

On en peut conclure que les axes sont de directions constantes; que, par suite, ce sont les normales aux trois surfaces homofocales qui passent en P.

2. Si l'on fait $c=0$ et $u=0$, le cône circonscrit devient celui qui a pour sommet le point P et passe par l'ellipse dont les équations sont

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Le changement de b^2 en $-b^2$ fera passer de ce cas à celui d'une hyperbole.

En faisant $c=0$ et $z=0$ dans les équations des différents cônes considérés ci-dessus, on obtient

$$\frac{b^2x_1}{x-x_1}-\frac{a^2y_1}{y-y_1}+\frac{(a^2-b^2)z_1}{-z_1}=0,$$

ou

$$(a^2-b^2)xy-a^2x_1y+b^2y_1x=0,$$
$$[x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2][x_1(y-y_1)-y_1(x-x_1)]$$
$$=(a^2-b^2)(x-x_1)(y-y_1),$$
$$[x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2]\,y=b^2(y-y_1),$$
$$[x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-z_1^2]\,z=a^2(x-x_1).$$

On a par là quatre coniques sur lesquelles sont les traces des axes du cône sur le plan de la conique donnée sur le plan xy.

Ces coniques sont chacune d'une détermination géométrique facile.

La première n'est autre chose que l'hyperbole qui est le lieu des pieds des normales abaissées du point $p(x_1y_1)$ sur l'ellipse et les lignes du second degré qui lui sont homothétiques et concentriques : résultat facile à prévoir. Car si M est la trace d'un axe du cône sur le plan de l'ellipse, son plan polaire par rapport au cône étant perpendiculaire à PM, la trace de ce plan, qui est la polaire de M par rapport à la conique, est perpendiculaire à pM, projection de PM; c'est-à-dire que le lieu de M est celui des points tels que la polaire de chacun d'eux est perpendiculaire à la droite qui le joint au point p; c'est-à-dire l'hyperbole en question.

La seconde conique passe en p, projection du sommet P du cône, et elle y est tangente à op. Elle passe encore aux deux points où les droites $(x - x_1 = 0)$, $(y - y_1 = 0)$ rencontrent la droite

$$[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) + z_1(z - z_1) - z_1^2 = 0],$$

qui est la trace sur le plan xy du plan mené en P perpendiculairement à OP. On connaît ainsi un triangle inscrit à la conique et la tangente en l'un des sommets. Pour achever la détermination de la conique, et pouvoir la construire, il suffit d'observer que le produit des distances de chaque point à la tangente op et au côté opposé, est avec le produit des distances aux deux autres droites dans un rapport égal à $\frac{a^2 - b^2}{op^2}$.

L'équation de la troisième conique peut se mettre sous

la forme

$$y[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) - z_1^2 - b^2] + b^2 y_1 = 0.$$

Cette conique a donc ox pour asymptote. La seconde asymptote a pour équation

$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) - z_1^2 - b^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{\mathrm{OP}^2 + b^2}{op},$$

en désignant par φ un angle de direction de op à l'égard de ox. Il est aisé de la construire. Elle passe en outre au point où la parallèle à ox, menée en p, rencontre la trace sur le plan xy du plan perpendiculaire à OP au sommet du cône. La construction de l'hyperbole suit de là immédiatement.

La dernière ligne est une hyperbole analogue, *mutatis mutandis*.

3. On ramène au problème précédent celui de construire les axes d'une surface du second degré, quand on en connaît le centre, une section plane dont le plan ne passe pas en ce centre, et un point de la section centrale parallèle.

Supposons d'abord que la surface soit un hyperboloïde. Soient conçus le cône asymptote et sa section par le plan de la conique donnée. Si a et A sont deux rayons parallèles dans la section centrale et la section donnée de l'hyperboloïde, et α le rayon de même direction dans la section du cône, on aura

$$\alpha^2 = \mathrm{A}^2 - a^2.$$

C'est une relation par laquelle on construira un point de cette dernière correspondant au point donné; par suite,

on connaîtra cette section du cône, et il ne s'agira plus que d'avoir les axes mêmes du cône. Quant à la première hyperbole, celle qui concerne les pieds des normales, elle sera la même pour la section donnée que pour la base du cône asymptote.

Au cas d'un ellipsoïde, le cône asymptote devient imaginaire; les considérations précédentes n'en subsistent pas moins. Ci-dessus, les quantités désignées par α^2, A^2, a^2 peuvent être négatives aussi bien que positives. Si dans notre analyse il y a à remplacer des quantités positives a^2 et b^2 par des quantités négatives $-a'^2$, $-b'^2$, il s'ensuivra comme hyperbole des *normales* la même hyperbole que pour $a^2 = a'^2$ et $b^2 = b'^2$; puis, au lieu de la conique donnée par

$$y[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) - z_1^2 - b^2] + b^2 y_1 = 0,$$

on aura celle que détermine l'équation

$$y[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) - z_1^2 + b'^2] - b'^2 y_1 = 0,$$

laquelle se construira d'une façon toute semblable.

Il est à remarquer que le problème traité autrement par M. Paul Serret (*Annales,* août 1868), celui de construire les axes d'une surface du second degré, quand on en connaît trois diamètres conjugués, rentre dans le précédent, car la section du cône asymptote par le plan tangent à une extrémité de l'un de ces diamètres peut alors se construire.

NOTE SUR LES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN;

PAR M. J. BOURGET.

1. On peut donner une forme extrêmement générale au reste de la série de Maclaurin, en y introduisant une

fonction arbitraire. On retrouve ainsi les diverses formes particulières, et l'on peut en tirer une infinité d'autres. Voici comment j'ai été conduit à ce résultat, qui peut-être n'est pas nouveau, car il est un corollaire facile de théorèmes bien connus.

2. On démontre facilement (*voir* le *Cours d'Analyse* de M. Duhamel) que, si $F(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues, finies et uniformes entre a et b, on a

$$\frac{F(a)-F(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{F'[a+\theta(b-a)]}{f'[a+\theta(b-a)]},$$

θ étant un nombre positif compris entre o et 1; peu importe d'ailleurs que a soit plus grand ou plus petit que b.

Si nous supposons, en outre, que

$$F(b)=0,\quad f(b)=0,$$

la relation précédente deviendra

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'[a+\theta(b-a)]}{f'[a+\theta(b-a)]}.$$

C'est de là que nous allons tirer l'identité de Maclaurin.

3. Supposons que a soit une variable et b une constante; posons

$$F(a)=\varphi(b)-\varphi(a)-\frac{b-a}{1}\varphi'(a)-\frac{(b-a)^2}{1.2}\varphi''(a)-\ldots$$
$$-\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(a)$$

et

$$f(a)=\varpi(b-a).$$

Nous admettrons que toutes les fonctions dérivées de φ

sont finies, continues et uniformes dans l'intervalle de a à b, et que $\varpi(0) = 0$. Nous aurons

$$F(b) = 0, \quad f(b) = 0,$$

et

$$F'(a) = -\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^n(a), \quad f'(a) = -\varpi'(b-a);$$

donc

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a) - \frac{b-a}{1}\varphi'(a) - \ldots - \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(a)}{\varpi(b-a)}$$
$$= \frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}\varphi^n[a+\theta(b-a)]}{1.2.3\ldots(n-1)\varpi'[(1-\theta)(b-a)]}.$$

De là nous tirons l'identité

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b-a}{1}\varphi'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(a)$$
$$+ \frac{\varpi(b-a)}{\varpi'[(1-\theta)(b-a)]}\frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^n[a+\theta(b-a)].$$

4. Supposons maintenant dans cette identité $a = 0$, et changeons b en x; nous aurons l'identité de Maclaurin

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(0) + \frac{\varpi(x)}{\varpi'[(1-\theta)x]}\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^n(\theta x),$$

et ϖ est une fonction arbitraire assujettie à la seule condition de s'annuler pour $x = 0$.

5. Si maintenant nous considérons, dans $\varphi(x+h)$,

h comme la variable, la série de Maclaurin nous donnera celle de Taylor :

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(x)$$
$$+ \frac{\varpi(h)}{\varpi'[(1-\theta)h]}\,\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^{n}(x+\theta h),$$

et ϖ est une fonction arbitraire assujettie seulement à la condition de s'annuler pour $h=0$.

6. Dans l'identité de Maclaurin, faisons

$$\varpi(x) = x^p.$$

p étant un nombre positif quelconque, nous aurons

$$\varpi'(x) = p x^{p-1};$$

par conséquent

$$\varpi'[(1-\theta)x] = p(1-\theta)^{p-1}x^{p-1}.$$

Nous aurons donc pour le reste

$$R = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p}\varphi^n(\theta x).$$

Si l'on fait dans cette formule :

1° $p=n$, on obtient la forme la plus généralement employée

$$R_1 = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(\theta x);$$

2° $p=1$, on obtient la seconde forme

$$R_2 = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^n(\theta x).$$

NOTE SUR LA RACINE CARRÉE DES NOMBRES APPROCHÉS;

Par M. J. BOURGET.

On a souvent à extraire la racine carrée d'un nombre entier ou décimal connu approximativement avec un certain nombre de figures exactes. (Nous entendons par là que l'erreur de ce nombre est moindre qu'une unité de l'ordre du dernier chiffre écrit à droite.)

Il semble résulter de la règle habituelle donnée pour l'extraction que le nombre des chiffres certains à la racine est moindre que celui du nombre proposé, puisque chaque chiffre de la racine correspond à une tranche de deux chiffres dans le nombre proposé.

Voici un théorème général très-simple et trop peu connu des élèves qui montre l'inexactitude de cette conclusion (*).

Théorème. — *On peut compter en général à la racine sur autant de chiffres exacts qu'il y en a dans le nombre proposé.*

Lemme. — Si le nombre dont on extrait la racine n'est pas entier, on le ramènera à un nombre entier en le multipliant par une des puissances paires de 10.

Pour la clarté de la démonstration du théorème, il est bon de distinguer deux cas.

(*) Nous avons voulu, en rédigeant cet article, appeler l'attention des élèves sur une règle facile à retenir pour résoudre certaines questions posées dans les examens. Il n'y a rien de nouveau dans notre énoncé, ni dans notre démonstration.

§ I. — *Nombre* A *approché par défaut.*

Soit α l'erreur commise dans le nombre, e celle de la racine, nous aurons

$$(1) \qquad e = \sqrt{A+\alpha} - \sqrt{A} = \frac{\alpha}{\sqrt{A+\alpha}+\sqrt{A}} < \frac{\alpha}{2\sqrt{A}}.$$

Désignons par p le premier chiffre de A et distinguons deux cas pour le nombre des chiffres entiers.

1° A *possède* $2n$ *chiffres à la partie entière.* — Alors on a

$$A \geqq p\,10^{2n-1};$$

par suite,

$$e < \frac{\alpha}{2.10^{n-1}\sqrt{10p}}.$$

Donc :

(a). Si $\alpha < \frac{1}{2}$, on aura

$$e < \frac{1}{4.10^{n-1}\sqrt{10p}} < \frac{1}{10^n}$$

(b). Si $\alpha < 1$, on aura

$$e < \frac{1}{2.10^{n-1}\sqrt{10p}},$$

et si $p \geqq 3$, on aura encore

$$e < \frac{1}{10^n}.$$

Par conséquent, l'erreur n'affectera pas le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de la racine; comme d'ailleurs elle a n chiffres à la partie entière, on pourra compter sur $2n$ chiffres à la racine.

(c). Si $\alpha < 5$, on aura

$$e < \frac{1}{4.10^{n-2}\sqrt{10p}} < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

(d). Si $\alpha < 10$, on aura

$$e < \frac{1}{2 . 10^{n-2} \sqrt{10p}},$$

et si $p \geqq 3$, on aura encore

$$e < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Par conséquent, dans l'un et l'autre cas, l'erreur n'affectera pas le $(n-1)^{ième}$ chiffre décimal; d'ailleurs la partie entière de la racine a n chiffres, donc on pourra compter sur $2n-1$ chiffres à la racine, c'est-à-dire sur autant qu'il y en a de certains dans le nombre proposé.

2° A *possède* $(2n+1)$ *chiffres à la partie entière.* — Dans cette hypothèse

$$A > p\, 10^{2n};$$

par suite,

$$e < \frac{\alpha}{2 . 10^n \sqrt{p}}.$$

Donc :

(a). Si $\alpha < \frac{1}{2}$, on aura

$$e < \frac{1}{4 . 10^n \sqrt{p}} < \frac{1}{10^n}.$$

(b). Si $\alpha < 1$, on aura

$$e < \frac{1}{2 . 10^n \sqrt{p}} < \frac{1}{10^n},$$

et dans les deux cas l'erreur n'affectera pas le $n^{ième}$ chiffre décimal, et comme la partie entière de la racine a $n+1$ chiffres, il y aura en tout $2n+1$ chiffres sûrs à la racine.

(c). Si $\alpha < 5$, on aura

$$e < \frac{1}{4 . 10^{n-1} \sqrt{p}} < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

(d). Si $\alpha < 10$, on aura

$$e < \frac{1}{2.10^{n-1}\sqrt{p}} < \frac{1}{10^{n-1}},$$

et, dans les deux cas, l'erreur n'affectera pas le $(n-1)^{ième}$ chiffre décimal ; donc la racine aura autant de chiffres sûrs que le nombre proposé.

§ II. — *Nombre* A *approché par défaut.*

Dans cette hypothèse

$$e = \sqrt{A} - \sqrt{A-\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{A}+\sqrt{A-\alpha}} < \frac{\alpha}{2\sqrt{A-\alpha}},$$

et, comme en exceptant le cas particulier où A serait une puissance de 10, on peut poser généralement

$$A \geqq p\,10^{m-1} + \alpha,$$

en désignant par m le nombre des chiffres, on a encore

$$e < \frac{\alpha}{2\sqrt{p}\sqrt{10^{m-1}}}.$$

On peut donc répéter maintenant les raisonnements du paragraphe précédent ; par suite, les conclusions sont les mêmes.

Remarque I. — Le théorème général présente l'exception suivante qu'il est bon de signaler :

Si le nombre des chiffres du nombre proposé est pair et que le premier chiffre soit inférieur à 3, *le nombre des chiffres sûrs de la racine est égal à celui du nombre donné moins un.*

Remarque II. — Voici pourquoi nous avons examiné le cas où $\alpha < 5$ et celui où $\alpha < 10$. Si le nombre des chiffres décimaux du nombre donné est impair, si, par

exemple, on prend $\sqrt{2} = 1,414$, le nombre entier dont on extraira ensuite la racine pour avoir $\sqrt{\sqrt{2}}$ sera approché à moins de 5 ou 10 unités du dernier ordre. Ce cas est donc aussi important que le premier où $\alpha < \frac{1}{2}$ ou 1.

Remarque III. — On trouve de nombreuses applications de ce théorème. Nous citerons en particulier : le calcul des moyennes géométriques dans la recherche de π par la méthode des isopérimètres, le calcul des radicaux superposés que l'on rencontre dans les expressions des côtés des polygones régnliers C_n; voici quelques-unes de ces expressions :

$$C_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$C_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$C_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$C_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$

$$C_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$C_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}},$$

$$C_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Remarque IV. — Nous ne nous sommes occupé que de la racine carrée, le théorème général est *à fortiori* vrai pour les racines d'un indice supérieur. On ferait facilement le raisonnement dans le cas de la racine cubique.

Remarque V. — On pourrait tirer une démonstration plus simple du même théorème de la théorie des erreurs relatives; mais elle serait moins directe.

IDENTITÉS ARITHMÉTIQUES;

PAR M. S. RÉALIS.

I. Ayant écrit suivant l'ordre descendant la suite des puissances k des $n+1$ premiers nombres impairs, ainsi qu'il suit,

$$(2n+1)^k,\quad (2n-1)^k,\quad (2n-3)^k,\ldots,\quad 3^k,\quad 1^k,$$

on multiplie chaque terme par le terme correspondant de la suite

$$1,\quad T_1,\quad T_2,\ldots,\quad T_{n-1},\quad T_n,$$

dans laquelle T_i est le coefficient de x^i dans le développement de $(1-x)^{2n+1}$, et l'on désigne par $f(k)$ l'expression

$$(2n+1)^k + T_1(2n-1)^k + T_2(2n-3)^k + \ldots + T_{n-1}\, 3^k + T_n\, 1^k.$$

Cela posé, si k est un impair positif qui ne dépasse pas $2n-1$, on a

$$f(k) = 0;$$

pour $k = 2n+1$, on a

$$\frac{f(2n+1)}{1.2.3.4\ldots(2n+1)} = 2^{2n}.$$

II. On désigne par $f(k)$ l'expression

$$n^k + T_1(n-1)^k + T_2(n-2)^k + \ldots + T_i(n-i)^k + \ldots$$
$$+ T_{n-3}\, 3^k + T_{n-2}\, 2^k + T_{n-1}\, 1^k,$$

dans laquelle n est un nombre entier plus grand que l'unité, et T_i est le coefficient de x^i dans le développement de $(1-x)^{2n}$.

Cela posé, si k est un nombre pair compris entre o et $2n$, on a

$$f(k) = 0;$$

si $k = 2n$, on a

$$\frac{f(2n)}{1.2.3.4\ldots(2n-1)2n} = \frac{1}{2}.$$

PROPRIÉTÉ DES BISSECTRICES D'UN ANGLE DU TRIANGLE, avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. Circonscrivons un cercle au triangle ABC (*), et menons le diamètre D'E' perpendiculaire au côté $BC = a$. Joignons les extrémités D', E' de ce diamètre au sommet opposé A par les droites D'A, E'A, qui coupent le même côté CB en D et E. La droite ADD' sera la bissectrice de l'angle intérieur CAB, et la droite E'AE sera celle de l'angle extérieur adjacent.

Cela construit, les deux droites AD, AD' seront les *deux bissectrices intérieures de l'angle* A, et les droites AE, AE' les *deux bissectrices extérieures du même angle* A.

2. Voici l'énoncé du théorème que nous voulons établir :

Dans tout triangle, le produit de deux côtés est égal au produit des deux bissectrices intérieures de l'angle compris, ainsi qu'au produit des deux bissectrices extérieures du même angle.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Pour le prouver, joignons le sommet C aux extrémités du diamètre D′E′; nous formons deux systèmes de triangles semblables

$$ACD' \text{ et } ABD, \quad ACE' \text{ et } ABE,$$

qui donnent

$$\frac{AD'}{AB} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{AE'}{AB} = \frac{AC}{AE};$$

on en tire

$$AD.AD' = AE.AE' = AB.AC,$$

ce qu'il fallait prouver.

3. Les valeurs de ces bissectrices sont

$$\alpha = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}, \quad \alpha' = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}};$$

$$\beta = \frac{\sqrt{bc(a+c-b)(a+b-c)}}{b-c}, \quad \beta' = \frac{(b-c)\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}};$$

en désignant par a, b, c les trois côtés du triangle, par α, α' les deux bissectrices intérieures, par β, β' les deux bissectrices extérieures, et en supposant $b > c$.

4. En représentant par S la surface de ce triangle, on voit que

$$4S = (b^2 - c^2)\frac{\alpha\beta}{bc} = (b^2 - c^2)\frac{bc}{\alpha'\beta'};$$

d'où

$$\sin A = \frac{b^2 - c^2}{2\alpha'\beta'}.$$

5. *Application à l'ellipse et à l'hyperbole.* — Soient B et C les deux foyers de ces courbes qui passent au sommet A; AB et AC seront les rayons vecteurs r et r' qui aboutissent en ce point.

Dans l'ellipse, les droites AE, AE′ seront les deux tan-

gentes t, t' en A, et les droites AD, AD′ seront les normales n, n' au même point. L'inverse a lieu pour l'hyperbole. Nous avons donc, en vertu de notre théorème,

$$tt' = nn' = rr',$$

c'est-à-dire que, *dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le produit des deux tangentes est égal au produit des deux rayons vecteurs menés au point de contact; et le produit des deux normales a la même valeur.*

6. L'égalité $tt' = nn'$ est générale; elle a lieu pour toute courbe, pourvu que l'angle des axes de coordonnées soit droit. Il est facile de s'en assurer par la comparaison des deux triangles rectangles semblables ADE, AD′E′; donc

Lorsqu'une courbe est rapportée à des axes rectangulaires, le produit des deux tangentes est égal au produit des deux normales.

7. En général, soit θ l'angle E′OE des axes de coordonnées; nous avons $\theta = D + D'$; d'où

$$\tang\theta = \frac{\tang D + \tang D'}{1 - \tang D \tang D'};$$

et, comme les deux triangles rectangles ADE, AD′E′ donnent

$$\tang D = \frac{t}{n}, \quad \tang D' = \frac{t'}{n'},$$

il vient

$$\tang\theta = \frac{tn' + nt'}{nn' - tt'}.$$

8. Dans les expressions des bissectrices α, α', β, β' au n° 3, remplaçons b par r, c par r', a par $2c$, et posons

$r + r' = 2a$, $a^2 - c^2 = b^2$ dans le cas de l'ellipse;

$r - r' = 2a$, $c^2 - a^2 = b^2$ dans celui de l'hyperbole;

nous trouvons, pour l'ellipse,

$$t = \frac{2\sqrt{rr' - b^2}}{r - r'}\sqrt{rr'}, \quad t' = \frac{r - r'}{2\sqrt{rr' - b^2}}\sqrt{rr'};$$

pour l'hyperbole,

$$t = \frac{2\sqrt{rr' - b^2}}{r + r'}\sqrt{rr'}, \quad t' = \frac{r + r'}{2\sqrt{rr' - b^2}}\sqrt{rr'};$$

et, pour les deux courbes à la fois,

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{rr'}, \quad n' = \frac{a}{b}\sqrt{rr'}.$$

Ces valeurs donnent, pour l'ellipse,

$$t' + t = \frac{a^2}{t'} + \frac{b^2}{t};$$

pour l'hyperbole,

$$t' - t = \frac{a^2}{t'} + \frac{b^2}{t};$$

et, pour les deux coniques,

$$\frac{n}{n'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

PROBLÈMES;

PAR M. H. LEMONNIER.

---

1. *Étant donnée une surface du second degré, on mène par un point* (x, y, z) *un plan variable, on en prend le pôle* $Q(x_1, y_1, z_1)$, *et l'on considère le cône circonscrit à la surface dont* Q *est le sommet : lieu des traces des axes du cône sur le plan.*

Si l'équation de la surface est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, en coordonnées rectangulaires, les axes étant les normales aux surfaces homofocales qui passent par le point Q, les équations du problème sont :

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}=1, \quad \frac{x_2^2}{a^2+u}+\frac{y_2^2}{b^2+u}+\frac{z_2^2}{c^2+u}=1,$$

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}=1, \quad \frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2+u}}=\frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2+u}}=\frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2+u}}.$$

De là

$$\frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2+u}}=\frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2+u}}=\frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2+u}}=\frac{\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}}{\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)}+\frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)}+\frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}}$$

$$=\frac{1-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}}{\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)}+\frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)}+\frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}}.$$

Or

$$1-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}-\left(1-\frac{x_2^2}{a^2+u}-\frac{y_2^2}{b^2+u}-\frac{z_2^2}{c^2+u}\right)$$

$$=-u\left[\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)}+\frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)}+\frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}\right].$$

D'où

$$x-x_2=-u\frac{x_2}{a^2+u}, \quad y-y_2=-u\frac{y_2}{b^2+u}, \quad z-z_2=-u\frac{z_2}{c^2+u},$$

ou

$$\frac{x}{a^2}=\frac{x_2}{a^2+u}, \quad \frac{y}{b^2}=\frac{y_2}{b^2+u}, \quad \frac{z}{c^2}=\frac{z_2}{c^2+u},$$

comme intersection commune des plans polaires de μ.

Par conséquent,

$$\frac{x - x_2}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - y_2}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z - z_2}{\frac{z}{c^2}} = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$$= \frac{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1}{\frac{xx_1}{a^4} + \frac{yy_1}{b^4} + \frac{zz_1}{c^4}}.$$

L'équation du lieu est donc

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{xx_1}{a^4} + \frac{yy_1}{b^4} + \frac{zz_1}{c^4}\right)$$
$$= \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

Remarque. — Les équations

$$\frac{x - x_2}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - y_2}{\frac{y}{b_2}} = \frac{z - z_2}{\frac{z}{c^2}}$$

indiquent que l'axe QM est normal au plan polaire du point M par rapport à la surface. Il l'est en effet au plan polaire du point M par rapport au cône; et ce plan polaire est le même que par rapport à la surface, puisque M est sur le plan de contact. Cette considération peut donner immédiatement les équations; d'où le reste.

2. *Du point* (x, y, z) *on mène à la surface une sécante quelconque* $P\mu\mu'$. *En ses points de rencontre* μ, μ' *avec la surface, on mène les plans tangents qui se coupent suivant la droite* D. *On mène par* D *les plans bissecteurs des angles dièdres des plans tangents : lieu de leurs traces* MM' *sur la sécante* $P\mu\mu'$.

La droite D est la droite conjuguée de la sécante;

d'où

$$\text{D}\quad\begin{cases}\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}+\dfrac{zz_1}{c^2}-1=0,\\[2mm] \dfrac{x\text{X}}{a^2}+\dfrac{y\text{Y}}{b^2}+\dfrac{z\text{Z}}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

Or, les plans bissecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre et forment un faisceau harmonique avec les deux plans tangents, de sorte que μ, μ', M et M' sont disposés harmoniquement. Le plan polaire de M, par rapport à la surface, passe donc en M' et aussi suivant D; c'est donc le plan bissecteur qui passe en M'. Donc le plan bissecteur passant en M est suivant D un plan perpendiculaire au plan polaire de M.

Or le plan donné par

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{x\text{X}}{a^2}+\frac{y\text{Y}}{b^2}+\frac{z\text{Z}}{c^2}-1\right)=0,$$

est perpendiculaire au plan donné par

$$\frac{x\text{X}}{a^2}+\frac{y\text{Y}}{b^2}+\frac{z\text{Z}}{c^2}-1=0,$$

si l'on a

$$\frac{x_1\text{X}}{a^4}+\frac{y_1\text{Y}}{b^4}+\frac{z_1\text{Z}}{c^4}+\lambda\left(\frac{\text{X}^2}{a^4}+\frac{\text{Y}^2}{b^4}+\frac{\text{Z}^2}{c^4}\right)=0;$$

il passe en M, si l'on a

$$\frac{\text{X}x_1}{a^2}+\frac{\text{Y}y_1}{b^2}+\frac{\text{Z}z_1}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{\text{X}^2}{a^2}+\frac{\text{Y}^2}{b^2}+\frac{\text{Z}^2}{c^2}-1\right)=0;$$

d'où

$$\left(\frac{\text{X}x_1}{a^4}+\frac{\text{Y}y_1}{b^4}+\frac{\text{Z}z_1}{c^4}\right)\left(\frac{\text{X}^2}{a^2}+\frac{\text{Y}^2}{b^2}+\frac{\text{Z}^2}{c^2}-1\right)$$
$$=\left(\frac{\text{X}^2}{a^4}+\frac{\text{Y}^2}{b^4}+\frac{\text{Z}^2}{c^4}\right)\left(\frac{\text{X}x_1}{a^2}+\frac{\text{Y}y_1}{b^2}+\frac{\text{Z}z_1}{c^2}-1\right).$$

Le lieu est donc le même que le précédent.

Ce fait s'explique aisément.

Soit M la trace d'un axe du cône sur le plan sécant mené en P. Le plan polaire de ce point, par rapport au cône et à la surface, est perpendiculaire sur QM; de sorte que, si M' en est le point de rencontre avec PM, la droite QM' est perpendiculaire sur QM; les points M et M' forment une division harmonique avec les points μ et μ' où la droite MM' coupe la surface. Puisque QM et QM' sont à angle droit, ce sont les bissectrices des angles que font $Q\mu$ et $Q\mu'$. Or les plans tangents au cône le long de $Q\mu$ et $Q\mu'$ se coupent suivant une droite D, qui est également inclinée sur ces droites $Q\mu$, $Q\mu'$ en sens contraires; car si l'on considère un plan perpendiculaire à QM, et les points où il coupe $Q\mu$, $Q\mu'$, on voit que les tangentes à la section en ces points étant parallèles, l'intersection dont il s'agit leur est parallèle, par suite, est comme elles également inclinée en sens contraires sur $Q\mu$ et $Q\mu'$. Il s'ensuit que les plans menés par cette intersection et les bissectrices QM, QM' sont les plans bissecteurs des angles dièdres que font les plans tangents en μ et μ'.

C. Q. F. D.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 841

(voir 2e série, t. VII, p. 44);

PAR M. H. BROCARD.

La forme d'équilibre d'un fil pesant dont la densité varie en raison inverse du carré de la longueur est une

chaînette ordinaire, inclinée de manière que sa tangente soit verticale à l'origine des densités.

Si cette origine recule indéfiniment sur la courbe, le fil devient homogène et l'axe de la chaînette se replace verticalement. On retrouve ainsi le cas ordinaire.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Considérons un élément infiniment petit NN′ du fil; il est soumis à son poids et à deux actions dirigées suivant les tangentes aux points N et N′, et qui sont les tensions du fil en ces points.

Soit ds la longueur de cet élément; exprimons que les forces qui lui sont appliquées se feraient encore équilibre si on les transportait en un point quelconque de l'espace.

Soit T la tension au point N. Les projections de cette force sur les axes supposés rectangulaires seront

$$-T\frac{dx}{ds}, \quad -T\frac{dy}{ds};$$

les projections de la tension au point N′ infiniment voisin seront ces mêmes quantités prises en signe contraire, et augmentées de leurs différentielles, c'est-à-dire

$$T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right), \quad T\frac{dy}{ds} + d\left(T\frac{dy}{ds}\right).$$

Enfin la pesanteur exerce une action $-\frac{\alpha}{s^2}\,ds$, verticale et dont la projection horizontale est nulle.

En égalant à zéro la somme des projections horizontales et verticales, il vient

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\alpha}{s^2}\,ds.$$

Ce sont les équations différentielles de la courbe en fonction des tensions inconnues. En intégrant, on a

$$T\frac{dx}{ds}=c,$$

$$T\frac{dy}{ds}=-\frac{\alpha}{s}+cb;$$

et, en éliminant T par division membre à membre, il vient

$$p=\frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha}{cs}+b,$$

ou, en posant $\frac{\alpha}{c}=a$,

$$p=-\frac{a}{s}+b.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe. On voit que $p=\infty$ au point $s=0$, c'est-à-dire à l'origine des densités.

Il faut maintenant prouver que cette équation appartient à la chaînette ordinaire.

A cet effet, nous allons montrer que ces deux courbes jouissent des mêmes propriétés. On sait que, dans une chaînette (*Cours de Mécanique* de Sturm, t. II, p. 51), le rayon de courbure en un point M est égal à la normale MN et que la ligne projetante PI du pied de l'ordonnée MP sur la tangente MT est constante. Or, ici, on a pour la valeur du rayon de courbure l'expression

$$R=\frac{s^2+(bs-a)^2}{a}.$$

Pour $s=o$, $R=a$. Au sommet B de la courbe, le rayon de courbure est minimum. En ce point, on a donc

$$s'=\text{arc MB}=\frac{ab}{1+b^2};$$

alors

$$R = \frac{a}{1+b^2},$$

et le coefficient angulaire de la tangente est

$$p = -\frac{a}{s'} + b = -\frac{1}{b}.$$

Ainsi l'inclinaison de l'axe est b.

L'équation de PI est

$$y = -s' = -\frac{ab}{1+b^2},$$

celle de MP est

$$y = bx;$$

donc

$$\text{PI} = -\frac{a}{1+b^2} = -\text{OB},$$

propriété de la chaînette.

D'autre part, en faisant $s = 2s'$, on a

$$R = \frac{4a^2b^2 + a^2(b^4 - 2b^2 + 1)}{(1+b^2)^2 a} = a,$$

même valeur qu'au point M.

La droite PO a pour équation

$$y + \frac{ab}{1+b^2} = -\frac{1}{b}\left(x + \frac{a}{1+b^2}\right),$$

ou

$$y = -\frac{1}{b}(x+a).$$

Elle coupe l'horizontale du point M au point symétrique du centre de courbure en M. La courbe est donc bien une chaînette ayant pour axe de symétrie la droite OB. Si on la rapporte aux axes OB, OP, cette chaînette aura pour équation

$$y = \frac{a}{2(1+b^2)}\left[e^{\frac{x(1+b^2)}{a}} + e^{-\frac{x(1+b^2)}{a}}\right].$$

Si l'on pose

$$\frac{a}{1+b^2}=m,$$

on aura

$$p=\frac{s}{m},$$

$$\text{PI}=y\frac{dx}{ds}=m,$$

$$s=\text{MI}=\sqrt{y^2-m^2},$$

$$\text{R}=\frac{y^2}{m},$$

$$\text{aire OBMP}=m\sqrt{y^2-m^2}=2\times\text{triangle PMI}.$$

Ces calculs de vérification sont en réalité un moyen détourné d'arriver à mettre l'équation différentielle de la courbe

$$p=-\frac{a}{s}+b$$

sous une forme commode pour l'intégration. Si l'on désigne, en effet, par p_1 et s_1 ce que deviennent les quantités p et s lorsque l'origine M est transportée en B et que les axes sont devenus BOP, on voit, en faisant la figure, que

$$s_1=s-\text{BM}=s-mb$$

et que

$$b=\frac{1+pp_1}{-p+p_1},$$

qui donne

$$p=-\left(\frac{1-p_1 b}{b+p_1}\right).$$

L'équation

$$p=\frac{-a}{s}+b$$

devient donc

$$-\left(\frac{1-p_1 b}{b+p_1}\right)=\frac{-a}{s_1+mb}+b,$$

et l'on en tire

$$p_1 = \frac{b^2(s_1 + mb) - ab + s_1 + mb}{a + b(s_1 + mb) - b(s_1 + mb)} = (s_1 + mb)\frac{(1 + b^2)}{a} - b,$$

ou, en remplaçant m par $\frac{a}{1 + b^2}$, il reste simplement

$$p_1 \frac{s_1}{m},$$

propriété caractéristique de la chaînette. Ainsi la question se trouve résolue, grâce à la transformation de coordonnées. La seconde partie de l'énoncé est une conséquence immédiate de la première.

Question 873

(voir 2e série, t. VII, p. 237);

PAR M. PAUL ENDRÈS,
Élève au lycée de Douai.

Si, par un point O, *on mène trois lignes respectivement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique. Trouver son équation.*

(S. ROBERTS, *The Educational Times.*)

Il résultera de la réciproque de l'*hexagramme de Pascal* que les six points D, E, F, G, H, K seront sur une conique, si les points de rencontre L, M, N des côtés opposés de l'hexagone qu'ils forment sont sur une droite.

Or on a, par suite du théorème des transversales,

$$\frac{MC}{MA}\frac{DA}{DB}\frac{KB}{KC} = 1,$$

$$\frac{NA}{NB}\frac{HB}{HC}\frac{GC}{GA} = 1,$$

$$\frac{LB}{LC}\frac{FC}{FA}\frac{EA}{EB} = 1;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{MC}{MA}\,\frac{NA}{NB}\,\frac{LB}{LC}=1;$$

donc L, M, N sont sur une droite.

Cherchons l'équation de la conique.

Prenons ABC pour triangle de référence. Soient α, β, γ les distances du point O aux trois côtés, et h, h_1, h_2 les hauteurs du triangle; de plus, pour abréger l'écriture, posons

$$h-\alpha=m, \quad h_1-\beta=p, \quad h_2-\gamma=q.$$

Les coordonnées des six points en fonction des données sont

$$\begin{array}{llll}
D & X=\alpha, & Y=m\dfrac{h_1}{h}, & Z=0,\\
E & X=\alpha, & Y=0, & Z=m\dfrac{h_2}{h},\\
F & X=p\dfrac{h}{h_1}, & Y=\beta, & Z=0,\\
G & X=0, & Y=\beta, & Z=p\dfrac{h_2}{h_1},\\
H & X=q\dfrac{h}{h_2}, & Y=0, & Z=\gamma,\\
K & X=0, & Y=q\dfrac{h_1}{h_2}, & Z=\gamma.
\end{array}$$

Exprimons que ces points sont sur la conique

$$aX^2+a_1Y^2+a_2Z^2+2bYZ+2b_1ZX+2b_2XY=0;$$

nous obtiendrons les six équations

$$\begin{aligned}
&a\alpha^2h^2+a_1m^2h_1^2+2b_2m\alpha hh_1=0,\\
&a\alpha^2h^2+a_2m^2h_2^2+2b_1m\alpha hh_2=0,\\
&a_1\beta^2h_1^2+ap^2h^2+2b_2p\beta hh_1=0,\\
&a_1\beta^2h_1^2+a_2p^2h_2^2+2bp\beta h_1h_2=0,\\
&a_2\gamma^2h_2^2+aq^2h^2+2b_1q\gamma hh_2=0,\\
&a_2\gamma^2h_2^2+a_1q^2h_1^2+2bq\gamma h_1h_2=0,
\end{aligned}$$

qui donnent les rapports des coefficients à l'un d'entre eux. On a ainsi

$$\frac{a}{a_2} = \frac{h_2^2 m\gamma}{h^2 q\alpha}, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{h_2^2 p\gamma}{h_1^2 q\beta},$$

$$\frac{2b}{a_2} = -\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{p}{\beta} + \frac{\gamma}{q}\right),$$

$$\frac{2b_1}{a_2} = -\frac{h_2}{h}\left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\gamma}{q}\right),$$

$$\frac{2b_2}{a_2} = -\frac{h_2^2}{hh_1}\frac{\gamma}{q}\left(1 + \frac{mp}{\alpha\beta}\right).$$

Par suite, l'équation cherchée est

$$\begin{aligned} m\beta\gamma h_1^2 h_2^2 X^2 + p\gamma\alpha h_2^2 h^2 Y^2 + q\alpha\beta h^2 h_1^2 Z^2 \\ - \alpha(\beta\gamma + pq) h^2 h_1 h_2 YZ \\ - \beta(\gamma\alpha + qm) h_1^2 h_2 h ZX \\ - \gamma(\alpha\beta + mp) h_2^2 h h_1 XY = 0. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par M. Fr. Conradt, étudiant en Mathématiques, à Berlin.

Question 489

(voir 1re série, t. XVIII, p. 358);

PAR M. LUCIEN BIGNON, à Lima (Pérou).

Si, généralement, on désigne par $a_{i,n}$ l'expression

$$a_{i,n} = (\alpha_i + \beta_i n)\cos n\varphi + (\gamma_i + \delta_i n)\sin n\varphi,$$

où n représente un entier quelconque positif ou négatif, et α_i, β_i, γ_i, δ_i des constantes arbitraires indépendantes de n, le déterminant

$$\Delta_{k,n} = \begin{vmatrix} a_{0,n} & a_{0,n+1} & \ldots & a_{0,n+k} \\ a_{1,n} & a_{1,n+1} & \ldots & a_{0,n+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k,n} & a_{k,n+k} & \ldots & a_{k,n+k} \end{vmatrix}$$

s'évanouit toutes les fois que $k > 3$, et pour $k = 3$, il conserve la même valeur, quelle que soit celle de n.

(T. A. HIRST.)

Nous avons

$$a_{i,n} = \alpha_i \cos n\varphi + \gamma_i \sin n\varphi + \beta_i\, n \cos n\varphi + \delta_i\, n \sin n\varphi.$$

Le déterminant $\Delta_{k,n}$ prendra donc la forme

$$\left|\begin{matrix} \alpha_0 \cos n\varphi + \gamma_0 \sin n\varphi + \beta_0\, n \cos n\varphi + \delta_0\, n \sin n\varphi; & \alpha_0 \cos(n+1)\varphi + \gamma_0 \sin(n+1)\varphi + \beta_0 (n+1)\cos(n+1)\varphi + \delta_0 (n+1)\sin(n+1)\varphi \ldots \\ \alpha_1 \cos n\varphi + \gamma_1 \sin n\varphi + \beta_1\, n \cos n\varphi + \delta_1\, n \sin n\varphi; & \alpha_1 \cos(n+1)\varphi + \gamma_1 \sin(n+1)\varphi + \beta_1 (n+1)\cos(n+1)\varphi + \delta_1 (n+1)\sin(n+1)\varphi \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k \cos n\varphi + \gamma_k \sin n\varphi + \beta_k\, n \cos n\varphi + \delta_k\, n \sin n\varphi; & \alpha_k \cos(n+1)\varphi + \gamma_k \sin(n+1)\varphi + \beta_k (n+1)\cos(n+1)\varphi + \delta_k (n+1)\sin(n+1)\varphi \ldots \end{matrix}\right|.$$

Sous cette forme, on voit qu'on pourra décomposer ce déterminant en déterminants partiels, chacun desquels se ramènera au produit de plusieurs des facteurs $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, $n \cos n\varphi$, $n \sin n\varphi$, $\cos(n+1)\varphi$, etc., par un déterminant dont la première ligne horizontale sera une combinaison $k+1$ à $k+1$ des quatre quantités α_0, β_0, γ_0, δ_0. Si $k > 3$, cette combinaison contiendra forcément deux fois l'une de ces quatre quantités, et le déterminant correspondant, ayant deux lignes verticales identiques, s'annulera.

Si $k = 3$, on voit que le déterminant donné est égal au produit des deux déterminants :

$$(1) \qquad \left|\begin{matrix} \alpha_0 & \gamma_0 & \beta_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{matrix}\right|$$

et

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \cos(n+3)\varphi & \sin(n+3)\varphi & (n+3)\cos(n+3)\varphi & (n+3)\sin(n+3)\varphi \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cos n\varphi & \sin n\varphi & n\cos n\varphi & n\sin n\varphi \end{vmatrix}.$$

Le déterminant (1) étant indépendant de n, il suffit de faire voir qu'il en est de même du second. Dans ce but, multiplions le déterminant (2) par le suivant :

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} (n+3)\cos(n+3)\varphi & (n+3)\sin(n+3)\varphi & -\cos(n+3)\varphi & -\sin(n+3)\varphi \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n\cos n\varphi & n\sin n & -\cos n\varphi & -\sin n\varphi \end{vmatrix},$$

qui lui est égal. Le terme qui se trouvera à l'intersection de la $(i+1)^{ième}$ ligne horizontale et de la $(j+1)^{ième}$ ligne verticale du produit sera

$$(n+j)\cos(n+i)\varphi\cos(n+j)\varphi+(n+j)\sin(n+i)\varphi\sin(n+j)\varphi-(n+i)\cos(n+i)\varphi\cos(n+j)\varphi-(n+i)\varphi\sin(n+j)\varphi,$$

qui revient à

$$(j-i)\cos(i-j)\varphi,$$

quantité indépendante de n.

36. Donc le produit considéré est indépendant de n. Il en sera, par conséquent, de même de sa racine carrée et de $\Delta_{3,n}$.

EXERCICES SUR LA PARABOLE.

1. Si d'un point T pris sur une tangente on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact, la distance du foyer au pied de la perpendiculaire est égale à la distance du point T à la directrice.

Déduire de là un moyen de mener à la parabole une tangente par un point extérieur.

2. L'ordonnée focale FB est moyenne harmonique entre les deux segments d'une corde focale quelconque MFM', c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{MF - FB}{FB - M'F}.$$

3. Si d'un point M on abaisse une perpendiculaire MQ sur un diamètre quelconque BQ et qu'on mène en même temps l'ordonnée MP conjuguée de ce diamètre, la perpendiculaire MQ sera moyenne proportionnelle entre le paramètre de la parabole et l'abscisse BP.

4. D'un point extérieur O on mène une sécante quelconque OQQ' et une parallèle à l'axe OC. Soit B le point de contact de la tangente parallèle à QQ' et F le foyer, on aura

$$OQ.OQ' = 4.OC.FB.$$

5. Déduire du théorème précédent que si un cercle coupe une parabole les lignes qui forment un couple de cordes communes sont également inclinées sur l'axe.

La réciproque est vraie.

6. Le paramètre est moyen proportionnel entre les doubles ordonnées des extrémités d'une corde focale.

7. Lieu des milieux d'une corde focale.

8. Lieu des centres des cercles inscrits dans un secteur de cercle donné, dont un des rayons est fixe de position.

9. Lieu des projections du foyer sur la normale.

10. Sur le paramètre (double ordonnée focale) comme diamètre on décrit une circonférence, on mène une tangente commune au cercle et à la parabole; démontrer que le paramètre partage en parties égales l'angle des rayons focaux de contact.

11. On mène deux obliques MD, ME également inclinées sur la normale MN; démontrer que FN est moyenne proportionnelle entre FD et FE.

12. Un triangle est circonscrit à une parabole dont le foyer est F, par les sommets A, B, C on mène des lignes respectivement perpendiculaires à FA, FB, FC; démontrer qu'elles concourent en un même point.

13. Soit MM′ la normale en M prolongée jusqu'à la parabole, soit MM″ une autre corde dont l'inclinaison sur l'axe soit la même que celle de la normale; démontrer que le triangle MM′M″ est rectangle en M″.

14. Soit MOM′ une corde quelconque coupant l'axe AX au point O, soient N et N′ les projections des points M et M′ sur l'axe, on aura

$$\overline{AO}^2 = AN.AN'.$$

15. Construire une parabole, connaissant la direction de l'axe, un point, une tangente et son point de contact.

16. Construire une parabole, connaissant deux points et le sommet du diamètre conjugué à la corde de ces deux points.

17. AB, CD sont perpendiculaires à une même droite AC. On prend sur CD un point Q quelconque et sur AQ, prolongé au besoin, on prend un point M dont

la distance à AB soit égale à CQ; trouver le lieu du point M.

18. Si l'ordonnée d'un point M partage en deux parties égales la sous-normale d'un point M', elle sera égale à la normale du point M'.

19. L'épure d'une parabole étant faite sur un plan, trouver son axe et son sommet.

20. Si un côté de triangle est parallèle à l'axe d'une parabole, les deux autres côtés sont entre eux comme les tangentes parallèles à ces deux côtés, comptées à partir de leur point de concours.

Corollaire. — Les deux tangentes issues d'un point sont entre elles comme les normales correspondantes.

21. Si l'on mène deux cordes focales, les rectangles des segments d'une même corde sont entre eux comme les cordes entières.

22. Décrire une parabole, connaissant trois points et la direction de son axe.

23. Si deux cordes rectangulaires partent du sommet, le paramètre est moyen proportionnel entre les abscisses des extrémités.

24. Si l'on joint au sommet les extrémités d'une corde focale, les points d'intersection avec le paramètre ont respectivement pour ordonnées les ordonnées des extrémités de la corde focale.

25. Si une corde PQ est normale à la parabole et si elle est vue du foyer sous un angle droit, le rayon vecteur FQ est double de FP.

26. Si par le sommet on mène une corde AB et par B une perpendiculaire à AB, rencontrant l'axe en C, la *sous-corde* AC est égale à quatre fois la distance du foyer à l'extrémité du diamètre conjugué à la corde.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME IX, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et Algèbre.

Pages.

Trigonométrie.

Pages.

Géométrie à deux dimensions.

Pages.

Géométrie à trois dimensions.

Calcul infinitésimal.

Mécanique.

Bulletin bibliographique.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME IX, 2e SÉRIE.)

Pages.







